Algèbre - Juillet 2024

Question 1

10 points

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{2}\log\left(12x^2+36x+24\right) \leq \frac{1}{2} + \log\left(x+\frac{3}{2}\right),$$

où $\log$ désigne le logarithme en base 10.

b) Calculer le coefficient de $a^6b^3c^2$ dans le développement de $(a+b+c)^{11}$.

Question 2

$\boxed{\text{10 points}}$

Déterminer l'ensemble S de tous les nombres complexes z tels que z^3 est un réel strictement supérieur à 27. Représenter dans le plan de Gauss l'ensemble S.

Question 3

10 points

a) Déterminer les réels a et b pour que

$$g(x) = x^2 + ax + b \text{ divise } f(x) = x^4 + 5x^2 + 9$$

et factoriser $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

b) Si on augmente de 2 cm la longueur de deux côtés parallèles d'un carré et de 3 cm la longueur des deux autres côtés, on obtient un rectangle d'aire 10 cm^2. Quelle est (en centimètres) la longueur d'un côté du carré initial ?

Analyse - Juillet 2024

Question 1

15 points

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{|\cos(2x)|} - |\sin(x)|$$

a) La fonction f est-elle paire ou impaire ? Est-elle périodique ? Si oui, préciser sa période.

b) Déterminer les éventuels zéros de f dans l'intervalle $[0,2\pi]$.

c) Déterminer la dérivée de f dans l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$.

d) La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? En $x = \frac{\pi}{4}$? En $x = \frac{\pi}{2}$? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées des éventuels points de maximum et de minimum de f dans l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$.

f) Sur la base de tous ces éléments, esquisser la graphe de f dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Question 2

$\boxed{\text{15 points}}$

Calculer les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 t\ \exp\left(\frac{t-2}{10}\right)\ dt$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+6x^2+18}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3+\cos\theta}{2-\cos\theta}\,d\theta$

Note : $\exp$ est la fonction exponentielle ($\exp(x)=e^x$).

Question 3

10 points

Une compagnie produit des filtres à café de forme conique, et souhaite minimiser la surface de papier utilisé pour produire chaque filtre. Sachant qu'un filtre doit pouvoir contenir un volume de $1\,\mathrm{dm}^3$, déterminer les dimensions optimales du cône (rayon de la base r et hauteur h).

Aide : le volume V d'un cône et l'aire A de la surface latérale d'un cône sont donnés par les formules

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad\qquad A = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

Question 1

$\boxed{\text{10 points}}$

Soit l'équation trigonométrique

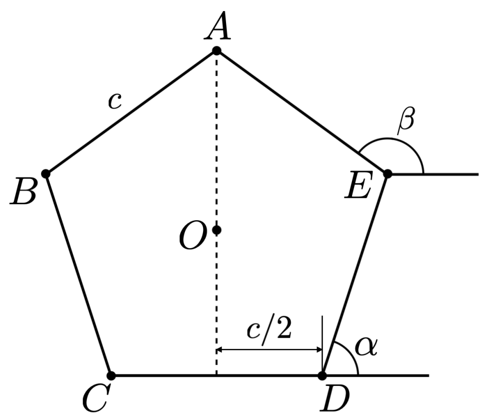
$$2\,\sin(2x) + \cos(2x) = -2. \tag{1}$$

a) (8 points) Trouvez toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1).

b) (2 points) Dessinez toutes les solutions de (1) sur le cercle trigonométrique.

Question 2

10 points



Dans le plan euclidien, on considère le pentagone régulier $ABCDE$ de centre O et représenté à la figure ci-dessus. Soit aussi l'angle aigu α formé par les droites CD et DE.

a) Déterminer l'amplitude de l'angle $\widehat{AOB}$

b) Déterminer l'amplitude de l'angle α.

c) Trouver les solutions réelles de l'équation trigonométrique

$$\cos x + \cos(2x) = -1/2.$$

d) Utiliser les points précédents pour démontrer soigneusement que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
[Indice : commencer par calculer β.]

e) Si $\|OA\| = 1$, quelle est la longueur c d'un côté du pentagone ?

f) Considérons par ailleurs le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A ainsi que la droite d' passant par O et perpendiculaire au diamètre du cercle issu de A. Soit F un point de d' à égale distance de O et $\mathscr{C}$. Soit enfin G le point de d' intérieur au disque délimité par $\mathscr{C}$ et tel que $\|FA\| = \|FG\|$. En supposant encore que $\|OA\| = 1$, déterminer la distance $\|AG\|$.

Hors examen : *[les curieuses et les curieux utiliseront tout ça pour justifier et refaire à la maison une construction d'un pentagone régulier inscrit à un cercle... bon amusement.]*

Question 3

10 points

Dans l'espace cartésien muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, soit la droite d' admettant les équations cartésiennes

$$d' \equiv \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 1, \\ x - z = 3. \end{cases}$$

et les point $P \equiv (2{,}1,-1)$ et $Q \equiv (3{,}2{,}1)$.

a) Déterminer les composantes de deux vecteurs indépendants et normaux à d'.

b) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de d'.

c) Déterminer la distance entre P et d'.

d) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de Q sur d'.

e) Déterminer des équations cartésiennes de la médiane issue de P du triangle HQP.