# Examen spécial d'admission – Juillet 2025

## Algèbre

### Question 1 (10 points)

Déterminez les valeurs des coefficients réels $a$, $b$ et $c$ du polynôme

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

sachant que $p(x)$ est divisible par $x^2 + x + 2$ et que $p(3) = -28$. Calculez ensuite la ou les racines réelles de $p(x)$.

### Question 2 (10 points)

a) Soit l'équation

$$-\frac{\mathrm{e}^x}{8} + a\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0.$$

Résolvez dans $\mathbb{R}$ cette équation et discutez par rapport au paramètre réel $a$.

b) On considère $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Si on tire (sans remise) $k$ boules parmi ces $n$ boules, quelle est la probabilité $P$ que les numéros tirés le soient dans un ordre croissant

- si $k = n$ ?
- si $k < n$ ?

### Question 3 (10 points)

Soit le polynôme à variable complexe $z$

$$p(z) = z^3 + (-2\alpha - 2 + i\beta)z^2 + (6\alpha - 3i\beta)z - 4\alpha + 2i\beta,$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Déterminez le ou les nombres réels qui, pour toutes valeurs de $\alpha$ et $\beta$, sont racines du polynôme $p(z)$.

b) Donnez les conditions sur $\alpha$ et $\beta$ pour que le polynôme $p(z)$ admette $2i$ comme racine.

c) Donnez les conditions sur $\alpha$ et $\beta$ pour que le polynôme $p(z)$ admette une racine triple.

# Analyse

## Question 1 (15 points)

Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = |x+2| + e^{x/2}.$$

1. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de $f$ avec les axes.
2. Calculez la dérivée première de $f$ (notée $f'$). Calculez ensuite la limite de $f'$ pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.
3. Déterminez les éventuels points de discontinuité de $f'$ et calculez la limite à gauche et à droite en chacun de ces points.
4. Calculez la dérivée seconde de $f$ et donnez son domaine de définition.
5. Déterminez les coordonnées des points de minimum et de maximum éventuels du graphe de $f$ en justifiant votre réponse.
6. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes verticales, horizontales et obliques de $f$.
7. Sur la base de tous ces éléments, esquissez le graphe de $f$.

## Question 2 (15 points)

Calculez les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

$$\text{a)} \int_{-2}^{2} x \exp\left(-|x| + x\right)\, dx \qquad \text{b)} \int \frac{3x-4}{x^2-x-6}\, dx \qquad \text{c)} \int \frac{d\theta}{1 + \dfrac{\sin(\theta)}{\tan(\theta/2)}}.$$

Note : exp est la fonction exponentielle ($\exp(x) = e^x$).

## Question 3 (10 points)

Les concepteurs d'un célèbre jeu vidéo ont décidé de le mettre à jour. Le jeu fonctionne sur un système 3D et permet de creuser dans le sol avec une pioche pour extraire différents minerais dans la couche terrestre. La distribution de ces minerais dans le sol dépend uniquement de la profondeur. Lorsque l'on creuse à une profondeur donnée, chaque bloc que l'on rencontre est de la pierre (sans valeur), du fer ou du cuivre.
Après la mise à jour, les nombres de kilogrammes de fer (indice $f$) et de cuivre (indice $c$) extraits par heure sont donnés, en fonction de la profondeur $z$ ($\in \mathbb{R}$), respectivement par

$$y_f(z) = -(\chi_f z - p_f)^2 + c_f$$
$$y_c(z) = -(\chi_c z - p_c)^2 + c_c$$

où toutes les constantes ($\chi_f$, $\chi_c$, $p_f$, $p_c$, $c_f$ et $c_c$) sont positives et choisies de telle sorte que $y_f(z) > 0$ et $y_c(z) > 0$ pour toutes les valeurs de $z$ pour lesquelles la couche terrestre existe. La monnaie du jeu est l'émeraude. La valeur commerciale du fer en émeraude/kg est égale à $\beta_f$ et celle du cuivre à $\beta_c$.

1. Trouvez l'expression de la valeur commerciale totale $v(z)$ du fer et du cuivre obtenue en une heure d'extraction (en émeraudes).
2. Trouvez l'expression de la profondeur optimale à laquelle creuser pour maximiser la valeur commerciale extraite par heure et justifiez qu'il s'agit bien d'un maximum.

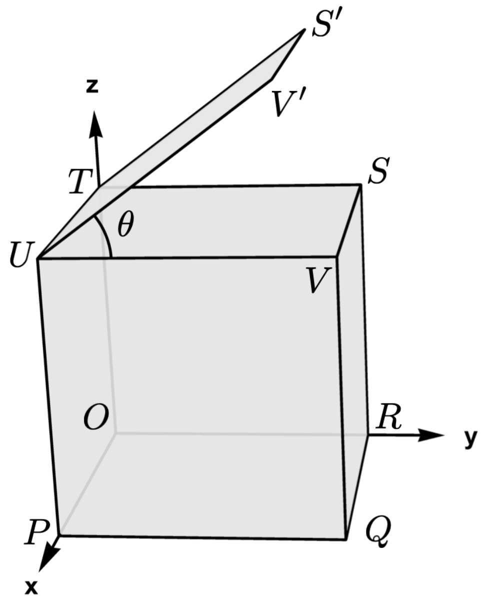
# Géométrie

## Question 1 (10 points)

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique suivante

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 3\cos^2 x\, \sin^2 x.$$

## Question 2 (15 points)




Considérons la boîte cubique $OPQRSTUV$ dont l'arête est de longueur $a$, de face $STUV$ manquante mais équipée d'un couvercle carré $S'TUV'$ articulé selon l'arête $TU$. Soit aussi $\theta = \widehat{VUV'}$. Déterminer les grandeurs et équation suivantes en fonction de $\theta$ et de $a$.

1. (1 point) Dans le repère cartésien $Oxyz$ indiqué sur la figure, un vecteur directeur de la droite $V'S'$.
2. (2 points) La longueur du segment $[PS']$.
3. (2 points) Une équation cartésienne du plan $V'VS$.
4. (6 points) L'amplitude de l'angle entre la droite $PS'$ et le plan $V'VS$.
5. (4 points) La distance entre le point $P$ et le plan $V'VS$.

## Question 3 (15 points)

Déterminer les deux lieux géométriques suivants dans le plan euclidien.

1. (8 points) Dans le plan cartésien muni du repère orthonormé $Oxy$, soient l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et la droite $d$ passant par $O$ et de pente $m$. Soit $d'$ une droite qui balaie le plan en restant parallèle à $d$. Déterminer le lieu des milieux des segments $[AB]$ où $A$ et $B$ sont les intersections de $\mathcal{E}$ et $d'$.
2. (7 points) Soit $[CD]$ un segment. Déterminer le lieu des points $P$ tels que $\widehat{CPD} > \pi/2$.