

Algèbre - Juillet 2026

Question 1

11 points

- a) En lançant 6 dés (non truqués), quelle est la probabilité que la somme des résultats des dés soit exactement égale à 7 ?
- b) Pour quelle valeur du réel a , le nombre complexe $z = \frac{3-i}{5+ai}$ est-il un imaginaire pur ?
- c) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{z^2}{2} - (2+5i)z - 15 + 10i = 0$.
- d) Donnez la valeur du premier terme d'une suite géométrique dont les neuvième et dix-septième termes valent respectivement 98 et 4802.
- e) Soit deux réels x et y . Sachant que les moyennes arithmétiques des ensembles $\{x\}$, $\{x, 4\}$ et $\{x, y, 4\}$ sont en progression arithmétique, que vaut la moyenne arithmétique de l'ensemble $\{x, y\}$?

Question 2

11 points

- a) Déterminez le polynôme réel $p(x)$ du troisième degré dont le coefficient du terme du premier degré est 1, dont la valeur numérique en $x = 0$ est 2 et dont la division par $x^2 - 1$ a pour reste $2x + 1$.
- b) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 \ln(4-x) \geq \ln(x+2)$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien

Question 3

8 points

Résolvez dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

Indiquez un résumé final de la discussion de ce système.

Analyse - Juillet 2026

Question 1

15 points

a) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$$

- 1) Déterminer le domaine de f .
- 2) Calculer la dérivée de f et préciser son domaine.
- 3) Déterminer les coordonnées des éventuels points de maximum et de minimum de f .
- 4) Déterminer les équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de f .
- 5) Sur base de ces éléments, esquisser le graphe de la fonction f .

b) Soit la fonction g définie par

$$g(x) = x\sqrt{1 - e^{-|x|}}$$

- 1) La fonction g est-elle continue en $x = 0$? Justifier en utilisant la définition de la continuité d'une fonction en un point.
- 2) La fonction g est-elle dérivable en $x = 0$? Justifier en utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.
- 3) Calculer la dérivée de g .
- 4) Déterminer les coordonnées des éventuels points de maximum et de minimum de g .
- 5) Déterminer les équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de g .
- 6) Sur base de ces éléments, esquisser le graphe de la fonction g .

Question 2

15 points

Calculer les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

- a) $\int e^{\sin x} \cos(3x) dx$
- b) $\int_1^3 2^y \sin(2^y - 5)^3 dy$
- c) $\int_0^{1/2} \lceil 4 \sin^2(\pi x) \rceil dx$

Note : $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier plus grand ou égal à x .

Question 3

10 points

La coupe du monde de hockey se jouera cet été à Wavre dans un stade pouvant accueillir jusqu'à 10 000 spectateurs. Une étude montre que si le prix d'entrée est fixé à 50€, on peut s'attendre à vendre environ 6000 billets d'entrée. De plus, l'étude montre qu'à chaque diminution du prix de 5€, le nombre de billets vendus augmente de 1000 unités. À quel prix les organisateurs devraient-ils fixer le billet d'entrée pour maximiser les recettes? Justifier votre réponse à l'aide du calcul différentiel.

Géométrie - Juillet 2026

Question 1

10 points

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin(3x) - \cos(2x) + 3\sin(x) + 1 = 0$$

Donner les solutions générales. Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Question 2

15 points

Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, on considère la famille de plans

$$\pi_t \equiv x + ty + (1 - t)z = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

ainsi que le point $P \equiv (1, 2, 3)$ et le plan $\sigma \equiv x - z = 0$.

- (1 point) Déterminer la valeur t_0 de t pour laquelle π_t est parallèle à l'axe Oz . Justifier.
- (3 points) Exprimer la distance $d(t)$ entre le point P et le plan π_t en fonction de t . Déterminer la valeur t_m de t qui minimise $d(t)$. Calculer cette distance minimale. Justifier.
- (2 points) Après avoir déterminé la valeur t_1 de t telle que π_{t_1} est perpendiculaire au plan σ , établir une équation cartésienne du plan π_{t_1} . Justifier soigneusement la réponse.
- (4 points) Déterminer une équation cartésienne de chacune des sphères de rayon $2\sqrt{2}$ et tangentes au plan σ au point $(1, 0, 1)$.
- (5 points) Déterminer des équations paramétriques de la droite $\ell = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \pi_t$, c'est-à-dire le lieu des points appartenant à *tous* les plans de la famille.

Question 3

15 points

Dans le plan cartésien Oxy on considère les points $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (1, 0)$ et $C \equiv (u, v)$ où $u \in \mathbb{R}$ est un réel et $v \in \mathbb{R}_0^+$ est un réel *strictement positif*.

On définit le carré $\mathcal{C}_1$ (respectivement $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) dont le segment $[AC]$ (respectivement $[CB]$ et $[BA]$) est un côté et tel que les points intérieurs à $\mathcal{C}_1$ (respectivement $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) ne contiennent aucun point intérieur au triangle ABC . Soient P , Q et R les centres respectifs de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

- (1 point) Donner les coordonnées de R . Justifier votre réponse.
- (1 point) Déterminer les coordonnées du point D diagonalement opposé à C dans le carré $\mathcal{C}_1$. Justifier.
- (2 points) Déterminer les coordonnées de P . Justifier.
- (6 points) Déterminer l'amplitude θ de l'un des angles formées par les droites AQ et PR . Justifier.
- (5 points) Soit $m \in \mathbb{R}_0$ et le point $K = AQ \cap PR$. Supposons à présent que le point C est restreint à la demi-droite ouverte définie par $y = mx - 1$ et $y > 0$. Déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique balayé par K lorsque C se déplace sur cette demi-droite et donner la nature du lieu.