

Algèbre – Septembre 2026

Question 1

11 points

- a) Sachant que $\log 2026 \approx 3,30664$, où $\log$ désigne le logarithme en base 10, calculez

$$\log \left(\frac{1}{0.002026} \right).$$

Donnez votre résultat arrondi à 5 décimales.

- b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux 3 en lançant 4 dés (non truqués) ?
- c) Donnez le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{3-i}{2+i}$.
- d) Sachant que a , b et c sont des réels strictement positifs en progression géométrique de raison q strictement positive, prouvez que $\log a$, $\log b$ et $\log c$ sont en progression arithmétique. Déterminez la raison de cette progression en explicitant votre calcul.
- e) Soit $p(x)$ un polynôme en x de degré $n > 1$. Sachant que les restes des divisions de $p(x)$ par $(x+2)$ et $(x-3)$ sont respectivement 2 et 12, déterminez le reste de la division de $p(x)$ par $(x+2)(x-3)$.

Question 2

11 points

- a) Résolvez dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} mx + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}.$$

- b) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$-\sqrt{2x(x-3)} \leq -\sqrt{7x-20}.$$

Question 3

8 points

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

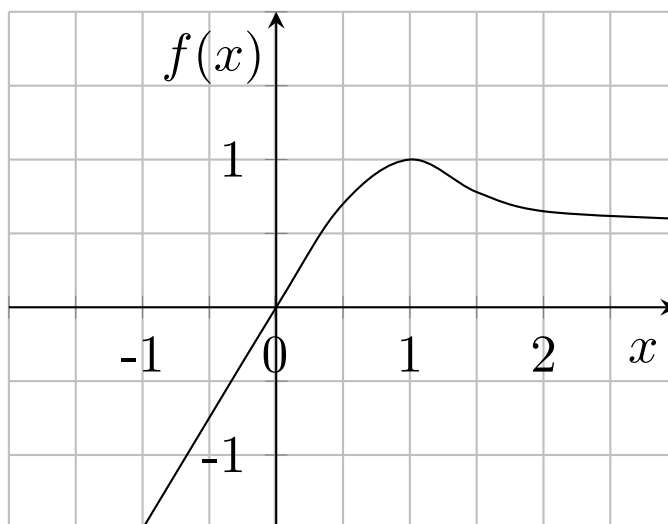
$$\frac{4}{(z+3)^4} + \frac{7}{(z+3)^2} = 2.$$

Analyse – Septembre 2026

Question 1

15 points

a) On considère une fonction f dont le graphe est donné ci-dessous.



Esquisser le graphe des fonctions suivantes.

1) $f(|x|)$

2) $f(2x)$

3) $f(x + 1)$

b) Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \cos(2\pi e^{-|x|})$$

- 1) Déterminer les éventuels zéros de g .
- 2) Cette fonction est-elle paire ou impaire ? Est-elle périodique ? Justifier.
- 3) Déterminer les coordonnées des éventuels points de maximum et de minimum de g .
- 4) Déterminer les équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de g .
- 5) Sur base de ces éléments, esquisser le graphe de la fonction g .
Aide : on peut utiliser les approximations $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

Question 2

15 points

Calculer les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{2x} - x e^{x^2}) \cos x \, dx$

b) $\int \frac{1}{\cos^2 x (25 + \tan^2 x)} \, dx$

c) $\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{16 - x^4} \, dx$

Question 3

10 points

La poste impose des restrictions sur les dimensions des colis : pour un colis de forme parallélépipède rectangle, la somme de la hauteur et du périmètre de la base ne peut pas dépasser 60 cm. Quelles sont les dimensions d'un colis de base carrée et de volume maximum que l'on puisse expédier ? Justifier votre réponse à l'aide du calcul différentiel.

Géométrie et trigonométrie – Septembre 2026

Question 1

10 points

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique suivante

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1.$$

Question 2

13 points

Dans le plan cartésien Oxy , on considère les points $A \equiv (-1,0)$ et $B \equiv (1,0)$ ainsi qu'un triangle ABC rectangle en C .

On note H le pied de la hauteur issue de C sur l'hypoténuse $[AB]$, et $O' \equiv (u,v)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

[Remarque : Dans la suite, les sous-questions d, e et f peuvent être résolues même si vous n'avez pas réussi les sous-questions a, b et/ou c.]

- a) (2 points) Justifier pourquoi le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, et en déduire le rayon r de $\mathcal{C}$ ainsi que les coordonnées (u,v) de O' .
- b) (2 points) Les triangles ABC , HCA et HCB sont-ils semblables ? Dans l'affirmative, préciser la correspondance des sommets pour chaque paire. Dans la négative, exhiber un triangle particulier qui respecte l'énoncé mais pour lequel ces triangles ne sont pas semblables. Dans les deux cas, justifier soigneusement.
- c) (3 points) Démontrer les trois relations :

$$|CH|^2 = |AH| \cdot |HB|,$$

$$|CA|^2 = |AH| \cdot |AB|,$$

$$|CB|^2 = |HB| \cdot |AB|.$$

- d) (2 points) Soit $P \equiv (u + r \cos \theta, v + r \sin \theta)$ un point variable sur le cercle $\mathcal{C}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $|PA|^2 + |PB|^2$ et montrer que cette somme est constante (c'est-à-dire indépendante de θ).
- e) (4 points) Calculer $|PA|^2 \cdot |PB|^2$ en fonction de θ . En déduire la valeur maximale de $|PA| \cdot |PB|$ et identifier le(s) point(s) P sur $\mathcal{C}$ qui réalisent ce maximum.

Question 3

12 points

Dans l'espace euclidien muni du repère orthonormé $Oxyz$, on considère le tétraèdre $OABC$ où $O \equiv (0,0,0)$, $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (0,2,0)$ et $C \equiv (0,0,1/t)$ avec $t > 0$ un paramètre réel.

- a) (2 points) Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par A , B et C .
- b) (3 points) Le tétraèdre $OABC$ a une hauteur issue de O . Le pied de cette hauteur dans le plan α est le point H . Déterminer les coordonnées de H en fonction de t .

- c) (3 points) Pour $t > 0$ quelconque, déterminer l'amplitude φ de l'angle entre le plan OAB et le plan α .
- d) (1 point) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC en fonction de t .
- e) (3 points) Existe-t-il certaines valeurs de t telles que l'intersection des hauteurs du triangle ABC soit confondue avec son centre de gravité G ? Si oui déterminer cette ou ces valeurs. Si non, justifier soigneusement.