Université libre de Bruxelles École polytechnique de Bruxelles

Examen spécial d'admission – Septembre 2025

Algèbre

Question 1 (7 points)

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+\frac{2}{3}}.$$

Question 2 (10 points)

a) Calculez le coefficient de $a^{18}b^2c^{24}$ dans le développement de $[(a+b)^{20}+c]^{25}$.

b) Calculez $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{1000}+(1-\sqrt{3}i)^{1000}}{(1-i)^{2000}}$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) strictement positive(s) de a (avec $a \neq 1$), les nombres $2025^{1/a}$, 2025^a et 2025^{a^2} sont-il en progression géométrique ? Pour cette valeur ou ces valeurs de a, donnez la raison géométrique associée.

Question 3 (8 points)

Sans calculer de déterminant, résolvez dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z & = & a \\ ax+2y+az & = & 1 \\ x+ay+2z & = & a^2 \end{array}\right. ,$$

Analyse

Question 1 (15 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x + \ln(2 + e^{|x|/2}).$$

1. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de f avec les axes.
2. Calculez la dérivée première de f (notée f') et la limite de cette dérivée pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.
3. Déterminez les éventuels points de discontinuité de f' et calculez la limite à gauche et à droite de f' en chacun de ces points.
4. Déterminez les coordonnées des points de minimum et de maximum éventuels du graphe de f en justifiant votre réponse.
5. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes verticales, horizontales et obliques de f.
6. Sur la base de tous ces éléments, esquissez le graphe de f.

Question 2 (15 points)

Calculez les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

$$\text{a)} \int \frac{(\text{arctg } x)^3}{2x^2+2}\, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{-2x+4}{x^2-1}\, dx,$$

$$\text{c)} \int_{-2025}^{2025} \frac{\sin^{2025}|x| \cos^{2025} x \sin x + \cos x}{e^{|x|}}\, dx.$$

Note : exp est la fonction exponentielle ($\exp(x) = e^x$) et arctg est la fonction arctangente.

Question 3 (10 points)

Un jeu vidéo de simulation de villes fait intervenir les éléments suivants :

- un revenu généré par habitant qui est noté b (en euros/habitant) ;
- un coût d'administration de la ville qui est $c\,P\ln(P/P_0)$ où P est le nombre d'habitants, P_0 est le nombre d'habitants à la création de la ville (avec $P \geq P_0$) et c est une constante exprimée en euros/habitant telle que $b \geq c$.

1. Trouvez l'expression du revenu net généré par la ville.
2. Déterminez l'expression du nombre d'habitants qui maximise le revenu net généré par la ville et justifiez qu'il s'agit bien d'un maximum.
3. En considérant que la densité d'habitants est constante (notée a) et qu'une ville se développe toujours de façon circulaire autour de son centre, trouvez l'expression du rayon du disque délimitant la ville maximisant le revenu net.

Géométrie et trigonométrie

Question 1 (10 points)

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sin(3x) - 4\sin(x) + \mathrm{tg}(x) = 0.$$

Question 2 (15 points)

Soit un réel a appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$. Dans un repère orthonormé et dextrogyre $Oxyz$ de l'espace euclidien, soient les points $A \equiv (1,0,a)$, $B \equiv (a,1,0)$, $C \equiv (0,a,1)$ et $Q \equiv (1,1,1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par A, B et C.
2. Déterminer des équations paramétriques de la droite d passant par Q et orthogonale aux droites AB et BC.
3. Déterminer l'amplitude de l'angle aigu formé par les droites AB et BC.
4. Déterminer des équations cartésiennes de la projection orthogonale d' de la droite d sur le plan Oyz.
5. Déterminer une équation cartésienne du plan β contenant d' et perpendiculaire à α.

Question 3 (15 points)

a) Soient ABC un triangle ainsi que les points suivants : A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[CA]$, C' le milieu de $[AB]$ et G l'intersection de AA' et BB' qui est donc aussi le centre de gravité du triangle. Définissons aussi D le point de la droite AA' différent de A et tel que $|AG| = |GD|$.
   1) (1 point) Tracer un dessin précis illustrant les définitions de l'énoncé.
   2) (3 points) Démontrer que les triangles $AB'G$ et ACD sont semblables.
   3) (3 points) Déterminer la nature du quadrilatère $CGBD$ et justifier soigneusement votre résultat.
   4) (3 points) Déterminer $|AA'|/|GA'|$.

b) (5 points) Soient un tétraèdre **régulier** $ABCD$, A' le centre de gravité de la face BCD, B' le centre de gravité de la face CDA, C' le centre de gravité de la face DAB et D' le centre de gravité de la face ABC. En sachant que
   1) les quatre droites AA', BB', CC' et DD' sont congruentes en un point G (c'est-à-dire que leurs intersections deux-à-deux sont toutes en un même point G),
   2) ce point G est le centre de gravité du tétraèdre,
   3) ce point G est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre régulier,
   4) AA' est perpendiculaire à la face BCD,

   déterminer $|AA'|/|GA'|$.

Remarques concernant la correction :

— *À la sous-question a), il est possible de répondre aux points 3) et 4) sans avoir effectué la preuve 2). Dans ce cas, les points des sous-questions 3) et 4) seront octroyés pleinement.*

— *Il est possible que vous connaissiez le résultat de la sous questions a)4) par cœur. Pour cette question, la réponse finale correcte mais sans justifications recevra 1.5/3.*