Question 1

10 points

L'équation $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$ possède 3 racines réelles en progression arithmétique. Sans calculer ces racines, déterminer la raison de cette progression et en déduire ensuite les valeurs des 3 racines.

Question 2

$\boxed{\text{10 points}}$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_{10} x} + \dfrac{1}{\log_{10} y} & = & \dfrac{-3}{5} \\ \log_{10} xy & = & \dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

b) Simplifier au maximum

$$\frac{x(x^3 - x^2 + x - 1)}{\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}} \text{ où } x \in \mathbb{R},$$

en n'oubliant pas de préciser les conditions d'existence de cette expression.

Question 3

10 points

a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de

$$z = \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^{20} \right]^{2} \right\}^{4}.$$

b) Supposons que

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a,b,c \in \mathbb{R}$ avec $a,c > 0$, admette x_1 et x_2 comme racines réelles. Exprimer, si elles existent, les racines de

$$q(x) = cx^2 - bx + a$$

en fonction de x_1 et de x_2.

Question 1

$\boxed{\text{10 points}}$

Pour quelles valeurs du réel m, l'équation trigonométrique suivante admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

$$\sqrt{3}\,\cos(2x) - \sin(2x) = m.$$

Résoudre ensuite cette équation dans $\mathbb{R}$ si $m = \sqrt{3}$ et représenter toutes les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question 2

10 points

Considérons la pyramide $\mathcal{P}_n$ dont la base est un polygone régulier à n côtés avec $n \geq 3$. Soit h_n la hauteur de $\mathcal{P}_n$ perpendiculaire à la base à n côtés. Supposons enfin que $\mathcal{P}_n$ est telle que ses arêtes sont toutes de longueur a.

a) (3 points) Calculer l'aire de la base de $\mathcal{P}_n$ fonction de a et n.

b) (6 points) Calculer h_n en fonction de n et de a.

c) (1 point) Pour quelles valeurs de n la pyramide $\mathcal{P}_n$ est-elle inscriptible dans une sphère ?

Question 3

10 points

a) Soit ABCD un trapèze tel que AB est parallèle à CD avec $\|AB\| > \|CD\|$. Soit M le milieu de AB et X l'intersection de la diagonale AC avec le segment $[DM]$. Soit aussi d la parallèle à AB passant par X. Soient enfin les points $W = d \cap AD$, $Y = d \cap DB$ et $Z = d \cap BC$.

1) Déterminer le ratio $\frac{\|WX\|}{\|XY\|}$.

2) Déterminer le ratio $\frac{\|XY\|}{\|YZ\|}$.

b) Dans le plan cartésien Oxy on donne les points $A \equiv (4, -3)$ et $B \equiv (-2,1)$.

1) Obtenir une équation cartésienne du lieu des points $P \equiv (x,y)$ tels que le produit des pentes des droites AP et BP est toujours égal à -6.

2) Déterminer la nature du lieu (c'est-à-dire, est-ce une droite, un cercle, autre chose ... ?)

Analyse - Septembre 2024

Question 1

15 points

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x+3+\frac{2}{x}}{1+e^{-x}}$$

a) Déterminer les éventuels zéros de f.

b) Déterminer la dérivée de f.

c) Déterminer des équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de f.

Les sous-questions ci-dessous demandent une justification rigoureuse mais il n'est pas utile de calculer les coordonnées des points.

d) Démontrer que la fonction f admet au moins un point de minimum pour $x > 0$.

e) Démontrer que la fonction f admet au moins un point de maximum pour $x < 0$.

f) La fonction f admet-elle également un point de minimum pour $x < 0$? Justifier.

g) Sur la base de tous ces éléments, esquisser la graphe de f.

Question 2

$\boxed{\text{15 points}}$

Calculer les intégrales (indéfinies ou définies) suivantes :

a) $\displaystyle\int t^3 \exp(-t^2)\ dt$ b) $\displaystyle\int_0^3 (1+|x-2|)^2\, dx$ c) $\displaystyle\int \sec^3\theta\ \operatorname{tg}^3\theta\ d\theta$

Note : $\exp$ est la fonction exponentielle ($\exp(x) = e^x$) et $\sec$ est la fonction sécante ($\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$).

Question 3

$\boxed{\text{10 points}}$

Un sculpteur dispose d'une sphère en marbre de rayon r et souhaite la tailler pour en extraire une pyramide droite à base carrée.

a) Montrer que si la pyramide est inscrite dans la sphère (c.-à-d. que ses 5 sommets sont à la surface de la sphère), le côté c de la base carrée est lié à la distance x entre cette base et le centre de la sphère par la relation

$$c^2 = 2(r^2 - x^2).$$

b) Déterminer les dimensions de la pyramide de volume maximal que le sculpteur pourra obtenir (côté c de la base et hauteur h de la pyramide) si $r = 1\,\mathrm{m}$.

Aide : le volume V d'une pyramide de hauteur h est donné par $V = \frac{A \cdot h}{3}$ où A est l'aire de sa base.