Algèbre - Septembre 2023

Question 1

a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{C}$ pour que l'équation

$$iz^2 + (1 + \alpha i)z + \alpha(1 + 2i) = 0$$

admette 2 solutions complexes conjuguées. Calculer ces solutions.

b) Quatre nombres réels a_1, a_2, a_3 et a_4 sont en progression géométrique. Sachant que a_1 est positif, que $a_2 - a_1 = 100$ et que $a_4 - a_3 = 900$, calculer a_4.

Question 2

a) Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + 23x + c$. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x)$ est divisible par $x + 3$, que $-\frac{1}{3}$ est une racine de $P(x)$ et que $P(-1) = -4$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\log(x + 1) \geq \log(2 - x) + \log 3,$$

où log désigne le logarithme en base 10.

Analyse - Septembre 2023

Question 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2}{x+1}}.$$

a) Déterminer le domaine de définition et les éventuels zéros de f.

b) Calculer la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

c) Déterminer des équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de f.

d) Déterminer les abscisses des éventuels points de maximum et de minimum de f.

e) Sur la base de ces éléments, esquisser le graphe de f.

Question 2

a) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

b) Soient $\ell, m \in \mathbb{N}$ et soit l'intégrale définie

$$I(\ell,m) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^\ell(x)\,\cos^m(x)\,dx.$$

1) Calculer $I(2,2)$.
2) Calculer $I(2023,2024)$.
3) Calculer $I(2024,1)$.
4) Etablir une relation liant $I(\ell,m)$ et $I(\ell+2,m-2)$ pour $m \geq 2$.

Trigonométrie - Septembre 2023

Question 1

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(3x) = 2.$$

Question 2

Soit un triangle ABC qui n'est pas isocèle. Soit aussi la bissectrice d issue de A ainsi que le point $P = d \cap BC$. Soit enfin la perpendiculaire d' à d passant par A et le point $Q = d' \cap BC$.

a) Effectuer un dessin reprenant toutes les indications de l'énoncé.

b) Énoncer la loi des sinus dans le triangle BAP.

c) Exprimer $\|BP\|/\|PC\|$ en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

d) Exprimer $\|BQ\|/\|QC\|$ en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

Géométrie - Septembre 2023

Question 1

a) Une structure est constituée de trois poutres issues d'un même point P et deux-à-deux perpendiculaires. Les poutres sont de longueurs respectives a, b et c. En supposant que la structure est indéformable, quelle est l'élévation du point P lorsque l'on pose les bouts libres des poutres sur un sol horizontal ?

b) Soient $\mathscr{C}$ un cercle, $[AB]$ l'un de ses diamètres et P un point intérieur au disque délimité par $\mathscr{C}$ mais tel que $P \notin [AB]$. Soit aussi le point Q appartenant à l'intersection de AP et $\mathscr{C}$ mais différent de A. De même, soit $R \in (BP \cap \mathscr{C}) \setminus \{B\}$. Enfin soit X le point d'intersection de AR et BQ.

   1) Trouver l'angle $\widehat{ARB}$.
   2) Trouver l'angle entre PX et AB.

Question 2

Dans le plan euclidien muni du repère cartésien Oxy, soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O, paramétrée par

$$\overrightarrow{OM} \equiv (a\,\cos\theta, b\,\sin\theta),$$

où $M \in \mathscr{E}$, $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$.

Soit P la projection orthogonale de M sur le grand axe de l'ellipse. Dans le triangle OMP, soit Q le pied de la hauteur abaissée de P. Notons enfin a et b les longueurs respectives des demi-grand axe et demi-petit axe de E.

a) Effectuer un dessin reprenant les définitions de l'énoncé.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite QP, en fonction de a, b et θ.

c) Déterminer des équations paramétrique du lieu parcouru par le point Q lorsque M parcourt l'ellipse.

d) Existe-t-il des points de ce lieu qui soient extérieurs à l'ellipse. Justifiez soigneusement votre réponse.