Algèbre - Juillet 2023

Question 1

a) Dans $\mathbb{R}^2$, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(x+y) & = & 0 \\ x+3y & = & 2 \end{array}\right. .$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^{2023} = i^{2023}.$$

c) Quatre nombres réels distincts a_1, a_2, a_3 et a_4 sont en progression arithmétique. Sachant que a_1, a_3 et a_4 sont en progression géométrique et que $a_2 + a_4 = 12$, calculer a_1.

Question 2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}.$$

b) Considérons le polynôme

$$P(x) = x^2 - 2mx + 9.$$

Déterminer les valeurs du paramètre réel m telles que le polynôme $P(x)$ admet deux racines réelles distinctes vérifiant chacune l'inégalité

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Analyse - Juillet 2023

Question 1

a) Déterminer le domaine de définition ainsi que les équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2x^3}.$$

b) On considère maintenant les fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\sin x\right), \qquad g(x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\cos x\right), \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer les éventuels zéros de f et g.
2) Calculer les dérivées de f et g.
3) La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4) La fonction h est-elle paire ou impaire ? Justifier.

Question 2

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit l'intégrale indéfinie

$$I(\lambda) = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + \lambda}.$$

1) Calculer $I(8)$.
2) Calculer $I(-8)$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit l'intégrale définie

$$J(p) = \int_1^{e^p} x^{-1} \lceil \ln x \rceil \, dx$$

où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier plus grand ou égal à x et $\ln x$ le logarithme népérien de x.

1) Calculer $J(1)$ et $J(2)$.
2) Calculer $J(p)$ pour $p \geq 1$.

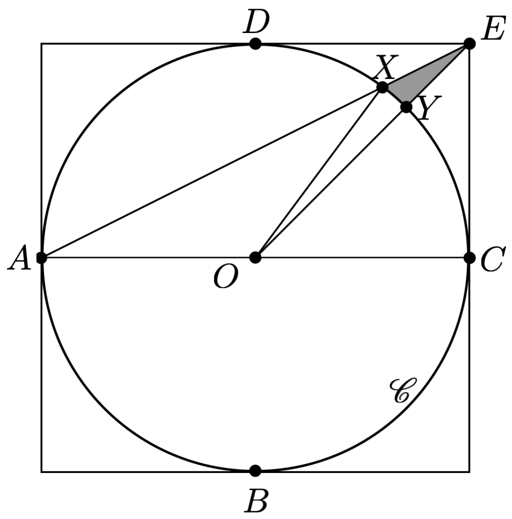
Trigonométrie - Juillet 2023

Question 1

Trouver toutes les solutions réelles de

$$2\cos(3x) - 14\,\cos(2x) + 34\,\cos(x) - 22 = 0.$$

Question 2



On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et l'un de ses carrés circonscrits. Notons aussi Δ le disque intérieur à $\mathscr{C}$. Soient A, B, C et D les points de tangence du cercle et du carré. Soit aussi le sommet E du carré tel que E est plus proche de D et C que de A et B. Soient enfin les points $X = \mathscr{C} \cap AE$ et $Y = \mathscr{C} \cap OE$. Notre objectif final est de calculer l'aire de la surface ombrée définie comme intérieure au triangle AEO mais extérieure au disque Δ.

a) (1 point) Déterminer l'amplitude de l'angle $\theta = \widehat{CAX}$.

b) (2 points) Déterminer l'amplitude de l'angle $\alpha = \widehat{XOE}$ en fonction de θ.

c) (3 points) Prouver que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

d) (2 points) Calculer l'aire du triangle OXE.

e) (2 points) Calculer l'aire de la surface ombrée.

Notons que les sous-questions d) et e) peuvent être résolues sans avoir résolu les trois premières sous-questions.

Géométrie - Juillet 2023

Question 1

Dans le plan cartésien muni du repère Oxy, on définit le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 4 et de centre O, la droite d d'équation cartésienne $y = -2$, un point A du cercle $\mathscr{C}$ qui n'appartient pas à d et les intersections B et C de d et $\mathscr{C}$ telles que B est d'abscisse négative. Soient aussi la médiatrice m du segment $[AB]$ et la bissectrice b de l'angle $\widehat{BCA}$.

a) (2 points) Trouver les coordonnées des points B et C.

b) (1 point) Trouver l'amplitude de l'angle $\widehat{BOC}$.

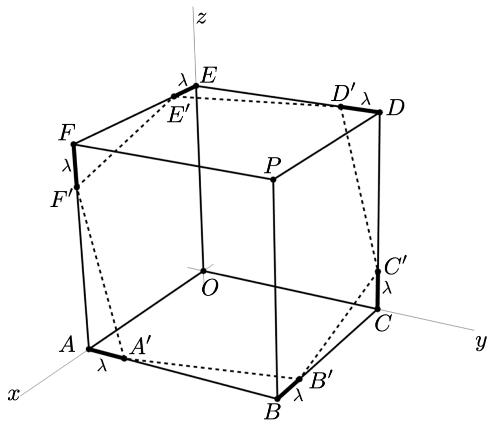
c) (2 points) Trouver l'amplitude de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ dans le cas où l'ordonnée de A est supérieure à -2.

d) (2 points) Pour un A général, posons $P = AB \cap b$. Exprimer l'angle $\widehat{CPA}$ formé par b et la droite AB en fonction des angles α et $\beta = \widehat{ABC}$.

e) (2 points) Soit Y le point d'intersection de la droite b et du cercle $\mathscr{C}$ qui est différent du point C. Trouver $\frac{\|YA\|}{\|YB\|}$. (Justifier soigneusement votre raisonnement)
[Indice : Utiliser la loi des sinus dans les triangles BCY et CAY.]

f) (2 points) Déterminer le lieu des points parcourus par l'intersection de m et de b lorsque le point A parcourt le cercle $\mathscr{C} \setminus \{B,C\}$.

Question 2



On considère le cube $OABCDEFP$ (voir figure) compris dans l'espace euclidien muni d'un repère $Oxyz$ et tel que le point P est de coordonnées (1,1,1), le point A est de coordonnées (1,0,0), le point C est de coordonnées (0,1,0), le point E est de coordonnées (0,0,1) et le chemin $OABCDEFP$ suit des arêtes du cube. Par ailleurs, on définit un paramètre $\lambda \in]0,1[$. Pour toute lettre $X \in \{A,B,C,D,E,F\}$, on définit le point X' tel que le segment $[XX']$ est compris dans l'arête indiquée sur la figure et ce segment est de longueur λ.

a) (3 points) Après avoir calculé les coordonnées des points A', B' et C', trouver l'angle aigu formé par les droites $A'B'$ et $B'C'$.

b) (4 points) Si $\lambda \in]0,\frac{1}{2}[$, montrer que les plans $B'D'F'$ et $A'E'C'$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

c) (3 points) Existe-t-il une valeur de $\lambda \in]0,1[$ telle que $A'B'C'D'E'F'$ forme un hexagone régulier ? Justifiez soigneusement votre réponse. Dans l'affirmative, quelle est cette valeur de λ ?