# *Algèbre - Juillet 2022*

**question 1**

a) Soit $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$.

   1) Montrer que $P(z)$ possède une racine imaginaire pure.
   2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b) On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$w = \frac{1+z}{1+i-2z}.$$

**question 2**

a) Déterminer les réels $x$, $y$, $z$ dont la somme égale 19, sachant que les nombres $2x$, $y$ et $z - 10$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique et que leur somme égale 18.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{7-6x} < 2x + 1.$$

**question 3**

a) Soit le polynôme $P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$.
Déterminer l'ensemble des réels $m$ pour lesquels $P(x)$ a 2 racines réelles $r_1$ et $r_2$ telles que $r_1^2 + r_2^2 = 29$.

b) Soit le polynôme $Q(x) = (m-1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3$.
Déterminer l'ensemble des réels $m$ tels que $Q(x) = 0$ possède 2 solutions réelles distinctes strictement négatives.

# *Analyse - Juillet 2022*

**question 1**

On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = -\left(\sin^2 x\right) \ln\left(\sin^2 x\right) - \left(\cos^2 x\right) \ln\left(\cos^2 x\right).$$

a) Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle et la période éventuelle $T$ de $f$.

b) Calculer $\ell_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$.

c) Donner la fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ en tout point du domaine de $f$.

d) Calculer $g'(x)$.

e) Déterminer les maximants et minimants locaux de $g$, ainsi que la valeur de $g(x)$ en ces points.

f) Tracer le graphe de $g$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en utilisant les résultats précédents.

**question 2**

Calculer en justifiant soigneusement

$$a) \quad \int_0^4 x\, e^{\sqrt{x}}\, dx, \qquad\qquad b) \quad \int e^{2x} \operatorname{arctg}\left(e^{x+1}\right) dx.$$

où arctg est la fonction arc tangente (réciproque de la fonction tangente).

**question 3**

On considère la surface de révolution $\mathcal{S}$ obtenue par rotation autour de l'axe $Ox$ de la droite d'équation $y = mx$ limitée à $x \in [0,\ell]$, où $m$ et $\ell$ sont deux paramètres réels positifs.

a) A l'aide du calcul intégral, calculer, en fonction de $m$ et $\ell$, le volume $V$ du solide de révolution délimité par $\mathcal{S}$ et par le plan $x = \ell$.

b) Sachant que l'aire $A$ de la surface $\mathcal{S}$ est donnée par $A = \pi\, \ell^2\, m \sqrt{1+m^2}$, déterminer, en fonction de $m$, la valeur de $\ell$ telle que $A = 1$.

c) Exprimer, pour une aire fixée $A = 1$, le volume $V$ en fonction de $m$.

d) Toujours pour une aire fixée $A = 1$, pour quelle valeur de $m$ le volume est-il maximum ? Calculer ce maximum.

# *Trigonométrie - Juillet 2022*

**question 1**

Calculer

a) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ;

b) $\dfrac{\sin(7x) + \sin(6x)}{\cos(7x) - \cos(6x)}$, sachant que $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$ ;

c) $\sin\left[\frac{3\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right]$.

Exprimer vos résultats sous la forme la plus simple possible. Pour rappel, arcsin désigne la fonction arc sinus.

**question 2**

Soit un triangle $ABC$ et soit $M$ le milieu du côté $[BC]$. Notons, respectivement, $\beta$ et $\gamma$ les angles associés aux sommets $B$ et $C$. Sachant que les longueurs des segments $[AB]$ et $[AM]$ sont identiques, montrer que

$$\sin(\beta + \gamma) = 2\sin(\beta - \gamma)$$

et en déduire la valeur du rapport

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

**question 3**

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x)\sin(x).$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi,\pi[$ sur le cercle trigonométrique.
*Indication* : $\sqrt{3} \approx 1.7$.

# *Géométrie - Juillet 2022*

**question 1**

Dans l'espace euclidien muni du repère $Oxyz$, on donne les points $A(1{,}2{,}3)$, $B(2{,}3{,}4)$ et $C(1{,}1{,}1)$ ainsi que les plans $\pi_1$ et $\pi_2$ d'équations cartésiennes

$$\pi_1 \equiv 2\,x + 2\,z = 2, \qquad\qquad \pi_2 \equiv x + y + 2\,z = 1.$$

a) Construire des équations paramétriques de la droite $d_1$ qui contient les points $A$ et $B$.

b) Construire des équations paramétriques de la droite $d_2 = \pi_1 \cap \pi_2$.

c) Calculer la distance entre le point $C$ et la droite $d_1$.

d) Déterminer le point $P \in d_2$ qui est le plus proche de la droite $d_1$.

e) Déterminer les équations cartésiennes de la droite $d_3$ perpendiculaire à la fois à $d_1$ et à $d_2$.

**question 2**

Dans le plan cartésien muni du repère $Oxy$, on donne le cercle $\mathcal{C}$ centré en $O$ et de rayon 3 et le point $X(5{,}0)$. Soit $T$ le point de $\mathcal{C}$ situé dans le demi-plan $y > 0$ et tel que $TX$ est tangente à $\mathcal{C}$. Soit enfin une droite $d$ issue de $X$ et telle qu'elle admet deux points d'intersection distincts $A$ et $B$ avec $\mathcal{C}$.

a) Calculer $\|TX\|^2$.

b) Montrer que le produit $\|XA\|\,\|XB\|$ ne dépend pas de l'angle $\alpha$ formé par les droites $OX$ et $d$ et en donner la valeur.

**question 3**

Dans le plan cartésien muni du repère $Oxy$, soit le cercle $\mathcal{C}_1$ centré en $O$ et de rayon 12. Nous cherchons à déterminer le lieu des centres $M$ de cercles $\mathcal{C}_M$ de rayons 9 et qui interceptent $\mathcal{C}_1$ sous un angle de 60° (i.e. l'amplitude de l'angle externe aux deux cercles et formé par les tangentes aux cercles en leur point d'intersection est de 60°.)

a) Soit $M_0$ un point de l'axe $Ox$, d'abscisse positive et tel que le cercle $\mathcal{C}_0$ de rayon 9 et centré en $M_0$ intercepte $\mathcal{C}_1$ en un point $A$ du demi plan $y > 0$ et sous un angle de 60°. Déterminer l'angle $\widehat{OAM_0}$

b) Déterminer le lieu des points $M$ décrit ci-dessus. En particulier, établir une équation cartésienne de ce lieu et en donner la nature.

# *Algèbre - Septembre 2022*

**question 1**

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$\left(\frac{z+2+i}{2z-1}\right)^4 = 1.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$(z-2+i) + \overline{(z+i-1)} = 0$$
où $\overline{w}$ désigne le complexe conjugué de $w$.

**question 2**

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies respectivement par
$$3u_{n+1} = u_n - 2,\ u_0 = 3 \text{ et } v_n = 1 + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer $v_2$, $v_3$.
2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison.
3) Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\sqrt{x^2-4x+3} > x-2.$$

**question 3**

Soit le polynôme $P(x) = 4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4$.

a) Montrer que si $\alpha$ est une racine de $P(x)$, alors $\alpha$ est non nul.

b) Montrer que $\alpha$ est une racine de $P(x)$ si et seulement si $\dfrac{1}{\alpha}$ est une racine de $P(x)$.

c) Montrer que $\alpha$ est solution de $P(x) = 0$ si et seulement si $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ est solution de $4t^2 + 8t - 45 = 0$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$.

# *Analyse - Septembre 2022*

**question 1**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

a) Déterminer les éventuels zéros ainsi que les coordonnées des éventuels points de maximum, points de minimum et points d'inflexion de $f$.

b) La fonction $f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, donner leur équation et préciser leur nature.

c) Esquisser le graphe de $f$ en y représentant tous les points remarquables déterminés en a).

d) Sans effectuer de calculs supplémentaires, esquisser le graphe de la fonction $g$ définie par $g(x) = |f(x)|$ en justifiant votre construction.

e) Même question que le point précédent pour la fonction $h$ définie par $h(x) = f(|x|)$.

f) Donner le domaine de dérivabilité des fonctions $g$ et $h$ ainsi que l'expression de $g'(x)$ et $h'(x)$ en tout point où ces dérivées existent. Justifier.

g) Donner les coordonnées des points de minimum des fonctions $g$ et $h$.

**question 2**

Calculer en justifiant soigneusement

a) $\displaystyle\int_0^{2022} \sin^5 \frac{\pi x}{2}\, dx$, b) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, e^x \sin x\, dx$.

**question 3**

Parmi tous les triangles isocèles dont deux côtés ont comme longueur 2 cm, déterminer le triangle dont l'aire est la plus grande. Donner la longueur du troisième côté de ce triangle ainsi que son aire.

# *Trigonométrie - Septembre 2022*

**question 1**

Soit un trapèze isocèle $ABCD$ dont les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ ont $2\,\mathrm{m}$ comme longueur commune, la longueur du côté $[AD]$ vaut $3\,\mathrm{m}$ et l'amplitude de l'angle $\widehat{BAD}$ vaut $\pi/3$. Calculer

a) la longueur des diagonales du trapèze $ABCD$ ;

b) le périmètre du trapèze $ABCD$ ;

c) l'aire du trapèze $ABCD$ ;

d) le cosinus de l'angle aigu formé par les diagonales du trapèze $ABCD$.

Vérifier la plausibilité de tous vos résultats à l'aide d'un dessin à l'échelle.

**question 2**

Que vaut

$$S_m = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{i=1}^{2^m-1} \sin^2 \frac{i\pi}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}} \left( \sin^2 \frac{\pi}{2^m} + \sin^2 \frac{2\pi}{2^m} + \ldots + \sin^2 \frac{(2^m-1)\pi}{2^m} \right)$$

pour

a) $m = 1$ ?

b) $m = 2$ ?

c) $m = 3$ ?

d) n'importe quel naturel $m$ strictement positif ?

Justifier votre réponse dans chaque cas.

**question 3**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{tg}(2x)} = \frac{\mathrm{tg}(2x)}{\mathrm{tg}(x)}.$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0{,}2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

# *Géométrie - Septembre 2022*

**question 1**

Dans l'espace tridimensionnel cartésien muni du repère $Oxyz$, on donne les points $P(1,2,1)$ et $Q(2,0,9)$ ainsi que le plan $\pi$ d'équation cartésienne $x - 2y + z = -2$.

a) Déterminer des équations cartésiennes de la droite $d_1$ contenant $P$ et $Q$.

b) Déterminer l'intersection de $d_1$ et de $\pi$.

c) Déterminer des équations paramétriques de la droite $d_2$ qui est la projection orthogonale de $d_1$ sur le plan $\pi$.

d) Déterminer une équation cartésienne du plan qui contient $d_1$ et $d_2$.

**question 2**

Dans le plan cartésien muni du repère $Oxy$, on donne les points $A(-2,0)$ et $B(2,0)$. Nous allons étudier les lieux des points dont le rapport des distances à $A$ et à $B$ est fixé, c'est-à-dire que pour $k \in \mathbb{R}^+$, nous allons considérer le lieu $\mathcal{E}_k$ des points $P$ tels que

$$\frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{BP}\|} = k.$$

a) Déterminer la nature et une équation cartésienne du lieu $\mathcal{E}_1$ (lorsque $k = 1$).

b) Déterminer la nature et une équation cartésienne du lieu $\mathcal{E}_0$ (lorsque $k = 0$).

c) Déterminer la nature et une équation cartésienne du lieu $\mathcal{E}_\lambda$ où $\lambda \in ]1, +\infty[$ (lorsque $k \in ]1, +\infty[$).

d) Considérons le cas particulier $\lambda = 3$ dans la sous-question précédente. Quelle valeur de $k \in ]0,1[$ fournira un lieu $\mathcal{E}_k$ qui sera le symétrique de $\mathcal{E}_3$ par une symétrie axiale d'axe $Oy$. Justifier soigneusement votre réponse.

**question 3**

Dans le plan cartésien muni du repère $Oxy$, on donne les points $A(-2,4)$ et $B(1,-5)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d_1$ qui contient $A$ et $B$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d_2$, de pente positive, passant par $B$ et qui forme un angle de $60°$ avec la droite $d_1$.

c) Établir une (des) équation(s) cartésienne(s) du lieu des centres des cercles qui sont tangents à la fois à $d_1$ et à $d_2$.