Algèbre - Juillet 2021

question 1

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$(5x^2 - 13x + 7)^2 - (5x^2 + 2x - 4)^2 = 0.$$

b) Pour quelle(s) valeur(s) du réel a, l'équation $x^2 = ax + 1$ admet-elle 2 solutions réelles distinctes ?

c) Trouver une fonction polynômiale du second degré ayant 1 et 4 comme zéros et dont le graphe passe par le point $(-1{,}1)$.

d) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le système
$$\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ x - 2y - 3 < 0 \\ 2x + y + 2 \geq 0. \end{cases}$$
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système dans $\mathbb{R}^2$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

question 2

a) Déterminer les paramètres réels a et b pour que le polynôme
$$x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$$
soit divisible par $x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

b) Déterminer le paramètre réel m pour que le reste de la division du polynôme
$$mx^2 - (2m - 1)x + 3$$
par $x + 3$ égale -3. Après avoir remplacé le paramètre m par la valeur trouvée, calculer le quotient.

c) Calculer la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on sait que $u_1 = 1$ et $u_5 = 2u_{10}$.

d) On considère la suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 2 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} : \ln(u_{k+1}) = 1 + \ln(u_k).$$
Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

question 3

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h définie par
$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2}}.$$

b) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de
$$\frac{2 + 5i}{1 - i}.$$

c) Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -1 + i$. Déterminer le module et l'argument de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$
où $|z|$ est le module de z.

Analyse - Juillet 2021

question 1

On considère les trois fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right), \qquad h(x) = \sin\left[1 - \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right].$$

a) Quel est le domaine de h ? Cette fonction est-elle paire ? Cette fonction est-elle impaire ?

b) En sachant que les points d'inflexions de la fonction f se trouvent en $x = \pm 1/\sqrt{3} \simeq \pm 0.58$, esquisser un graphique approximatif de f. Justifier votre construction. En particulier, mentionner les éventuels extremums de la fonction ainsi que ses asymptotes.

c) Trouver l'image de la fonction g.

d) Sans calculer la dérivée seconde de h, trouver les extremums de h et déterminer si ce sont des maximums ou des minimums. (Justifier soigneusement le raisonnement)

e) Trouver les asymptotes de h si elles existent.

f) Esquisser un graphique de la fonction h.

Pour rappel, $\exp(1) = e \simeq 2.718\ldots$

question 2

Calculer en justifiant soigneusement

$$a) \quad \int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\right) dx,$$

$$b) \quad \int_{-21}^{21} \frac{x^{20} + \sin^{21}(x^{21})}{1+x^{42}} \, dx.$$

Il y a un bonus si vous prouvez aussi que la seconde intégrale est presque égale à $\pi/21$.

question 3

Une sauveteuse se trouve en bord de mer en un point S lorsqu'elle remarque qu'une personne se trouvant en un point P (dans la mer) est en détresse. La sauveteuse est capable de courir le long de la berge à la vitesse $v = \frac{\sqrt{409}}{3}$ m/s et de nager à la vitesse $u = 1$ m/s. Sa stratégie consiste à courir le long de la berge jusqu'à un point B de son choix et à ensuite nager de B à P. Soit A le point de la berge qui est le plus proche de P. Si la nageuse sait que la distance $|SA|$ est de 100 m et que la distance $|AP|$ est de 20 m, quelle est sa stratégie optimale pour atteindre P le plus rapidement possible ? On supposera que la berge forme un segment de droite.

Trigonométrie - Juillet 2021

question 1

Calculer

a) $\operatorname{tg}\left(\frac{23\pi}{12}\right)$;

b) $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right]$;

c) $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right]$;

d) $\sin\left\{2\left[\operatorname{arctg}(3)\right]\right\}$.

Exprimer vos résultats sous la forme la plus simple possible. Pour rappel, la notation arctg désigne la fonction arc tangente.

question 2

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\cos(x) - \cos(2x) - \sin(3x) = 0.$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi,\pi[$.

question 3

Soit un triangle ABC acutangle. Notons par α l'amplitude de l'angle $\widehat{CAB}$ et par β l'amplitude de l'angle $\widehat{ABC}$. La longueur du côté $[AB]$ est notée c.

a) Représenter schématiquement le triangle ABC et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.

b) Exprimer, en fonction de α, β et c,

   i) le périmètre du triangle ABC ;

   ii) l'aire du triangle ABC.

Géométrie - Juillet 2021

question 1

Les côtés d'un carré sont divisés en trois parties égales. On numérote de 1 à 12 les points de subdivision en commençant par un des sommets (les sommets correspondant dès lors aux points 1, 4, 7 et 10). On joint le point 2 au point 8, le point 3 au point 7, le point 4 au point 12 et le point 5 au point 11. Les quatre droites ainsi construites déterminent alors un second carré. Calculer le rapport entre les aires des deux carrés.

question 2

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$. On considère la droite d et les plans α et β d'équations cartésiennes respectives

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z-2 \\ y & = & 2z+1, \end{array} \right. \qquad \alpha \equiv x+2y+z=1, \qquad \beta \equiv 2x+y-z=1.$$

Finalement, on considère un point $P(x_P,y_P,z_P)$ n'appartenant pas à la droite d.

a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d.

b) Déterminer, en fonction de $x_P,y_P,z_P \in \mathbb{R}$, des équations paramétriques de la droite d' perpendiculaire à d passant par P.

c) Déterminer, toujours en fonction de $x_P,y_P,z_P \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point P' symétrique de P par rapport à d.

d) Le plan α est-il parallèle à la droite d ? Est-il perpendiculaire à la droite d ? Déterminer une équation cartésienne du symétrique α' du plan α par rapport à la droite d.

e) Le plan β est-il parallèle à la droite d ? Est-il perpendiculaire à la droite d ? Déterminer une équation cartésienne du symétrique β' du plan β par rapport à la droite d.

question 3

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit A un point du plan et k une constante réelle. On dit que deux figures sont inverses l'une de l'autre par rapport à A avec puissance d'inversion k si, à tout point P d'une de ces figures, correspond un point Q de l'autre tel que A, P et Q sont alignés, et le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ vaut k.

Le but de cet exercice est de trouver la figure inverse de l'axe Oy par rapport au point $A(2,0)$, pour une puissance d'inversion $k=2$. Pour ce faire, on suit les étapes suivantes.

a) On considère un point variable $P(0,a)$ de l'axe Oy, $a \in \mathbb{R}$ étant un paramètre variable. Etablir, en fonction de a, des équations paramétriques de la droite variable AP.

b) Déterminer, en fonction de a, les coordonnées du point Q de la droite AP tel que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2$ (ce point fait donc partie de la figure inverse recherchée).

c) En déduire une équation cartésienne et la nature du lieu décrit par le point Q lorsque le point P varie sur l'axe Oy.

Algèbre - Septembre 2021

question 1

a) Sans utiliser les valeurs des racines données ci-dessous, déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 tel que

$$P(0) = 24, \quad P(1) = -30, \quad P(-1) = 36, \quad P(2) = -72$$

et le coefficient du terme de plus haut degré est 2.

b) Sachant que -2 et 3 sont racines de ce polynôme, déterminer les autres racines réelles de $P(x)$.

question 2

a) $ABCD$ est un rectangle. Le segment $[AB]$ mesure 3 cm et le segment $[BC]$ mesure 5 cm. Les points M, N, P et Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et $||AM|| = ||BN|| = ||CP|| = ||DQ||$. On note x la longueur du segment $[AM]$ en cm.

1) Exprimer l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle $MNPQ$ égale 9 cm^2 ?

b) Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} : z \to \frac{iz}{z-i}$

1) Déterminer les complexes z tels que $f(z) = z$.
2) Dans le plan de Gauss, représenter géométriquement $f(1)$ et w tel que $f(w) = 2$.
3) Dans le plan de Gauss, représenter géométriquement $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$.
4) Démontrer que si $|z - i| = 1$, alors $|f(z) - i| = 1$.

question 3

a) On estime que la population d'un village augmente de 4% au cours de l'année, et qu'ensuite, le 31 décembre, chaque année, 20 personnes quittent le village. Au premier janvier 2021, la population est de 3000 habitants. On modélise cette population par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où u_n représente le nombre d'habitants du village le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2021 + n)$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 500$$

est une suite géométrique.

3) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$$

Analyse - Septembre 2021

question 1

On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp[x \quad \arctan(1/x)] & \text{si } x \in \mathbb{R}_0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer la parité de la fonction f.

b) La fonction f est-elle continue ?

c) Trouver les asymptotes de f.

d) Calculer $f'(x)$.

e) Le point $x = 0$ est-il un minimant local ou un maximant local de la fonction f ? Attention, une réponse sans justification ne sera pas comptabilisée.

Pour rappel, par définition on a $\forall x \in \mathbb{R} : \; \exp(x) = e^x$.

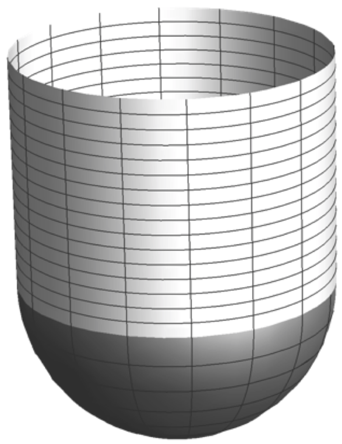
question 2

Calculer en justifiant soigneusement

$$a) \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin\left(\sqrt{x^2}\right) \; dx, \qquad\qquad b) \quad \int_0^1 \frac{(x-1)^2\,(x-2)}{x^2 - 4\,x + 5} \; dx.$$

Pour la seconde intégrale, on donne aussi les deux indices suivants : (1) commencer par effectuer la division polynomiale de $(x-1)^2(x-2)$ par $x^2 - 4\,x + 5$ et (2) le dénominateur peut aussi s'écrire $x^2 - 4\,x + 5 = (x-2)^2 + 1$.

question 3



On voudrait construire un silo (voir dessin ci-contre) dont le fond est une demi-sphère de rayon r et dont le corps est un cylindre de rayon r et de hauteur h. La partie cylindrique coûte 20 Eur par mètre carré et la partie sphérique coûte 40 Eur par mètre carré. Caractériser le silo de volume maximal si l'on dispose d'un budget de 3000 Eur. Justifier soigneusement les raisonnements. Enfin, calculer une approximation grossière du rayon r et de la hauteur h en supposant $\pi \simeq 3$.

Trigonométrie - Septembre 2021

question 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}\left(\cos x - \sin x\right).$$

Représenter précisément les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi,\pi[$ sur le cercle trigonométrique.
Remarque : bien que les solutions ne soient pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.

question 2

Soit un trapèze $ABCD$ dont les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles et dont les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CDA}$ sont aigus. Notons par α l'amplitude de l'angle $\widehat{BAD}$. Les longueurs des côtés $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$ sont notées, respectivement, a, b et c.

a) Représenter schématiquement le trapèze et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.
b) Exprimer, en fonction de a, b, c et α,
   i) la longueur de $[AC]$, diagonale du trapèze $ABCD$;
   ii) l'amplitude de l'angle $\widehat{CDA}$.

question 3

Évaluer

$$\sin\left[\arccos(0) + \arccos(1) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right].$$

Exprimer votre résultat sous la forme la plus simple possible. Pour rappel, la notation arccos désigne la fonction arc cosinus.

Géométrie - Septembre 2021

question 1

Soit $ABCDE$ une pyramide de base carrée $ABCD$ dont les quatre autres faces sont des triangles équilatéraux. Calculer, en fonction de la longueur c du côté de ces triangles équilatéraux :

a) la hauteur h de la pyramide ;

b) le rayon R de la sphère circonscrite à la pyramide ;

c) le rayon r de la sphère inscrite à la pyramide.

question 2

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$. On considère la droite d d'équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1, \end{cases}$$

ainsi que les points $A(0{,}0{,}2)$ et $B(1,\lambda,2)$, où λ est un paramètre réel.

a) Déterminer des équations cartésiennes pour la droite d' passant par A et B.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites d et d' sont-elles orthogonales ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites d et d' sont-elles parallèles ?

d) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites d et d' sont-elles coplanaires ? Déterminer une équation cartésienne du plan α formé par ces deux droites pour cette/ces valeur(s) de λ.

e) Montrer que pour toute valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une unique paire de plans parallèles π et π' tels que $d \subset \pi$ et $d' \subset \pi'$. Déterminer des équations cartésiennes de ces plans (en fonction du paramètre λ).

question 3

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 4$.

Soit d une droite variable passant par le point $P(1{,}0)$.

a) Discuter, en fonction du coefficient angulaire m de la droite d, le nombre de points d'intersection entre l'hyperbole $\mathcal{H}$ et la droite d.

b) Dans le cas où cette intersection est constituée de deux points Q,R, déterminer les coordonnées de ces points.

c) Soit M le milieu du segment $[QR]$. Établir une équation cartésienne du lieu parcouru par M et identifier le type de lieu.