Algèbre - Juillet 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Pour chaque sous-question, 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque sous-question, cochez les 2 affirmations vraies.
Chacune des 3 sous-questions vaut 1/3 des points de la question 1. Si les 2 affirmations vraies (et seulement celles-là) sont cochées, les points de la sous-question sont attribués. Dans les autres cas, aucun point n'est attribué mais il n'y a pas de points négatifs .
Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme à coefficients réels, et d un entier naturel non nul.

a)
1) Si le degré de $P(x)$ est d, alors le degré de $P(x) - x^d$ est strictement inférieur à d.
2) Si le degré de $P(x)$ est d, alors le degré de $P'(x)$ est $d - 1$.
3) Si le degré de $P(x)$ est d, alors le degré de $P(x - 1)$ est $d - 1$.
4) Si le degré de $P(x)$ est d, alors le degré de $P'(x - 1)$ est $d - 1$.
5) Si le degré de $P(x)$ est d, alors le degré de $(x + 2)P(x + 2)$ est $d + 2$.

b)
1) Si 2 est racine de $P(x)$, alors 0 est racine de $P(x) - 2$.
2) Si 2 est racine double de $P(x)$, alors $P'(x)$ est divisible par $(x - 2)$.
3) Si $P'(x)$ est divisible par $(x - 2)$ alors 2 est racine double de $P(x)$.
4) Si $P(x)$ et $P'(x)$ sont divisibles par $(x - 2)^2$, alors $P(x)$ est divisible par $(x - 2)^3$.
5) Si 2 est racine double de $P(x)$ et de $P'(x)$, alors $P(x)$ est divisible par $(x - 2)^3$

c)
1) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 2)$ est $P(2)$.
2) Si $P(2) = P'(2)$, alors les restes des divisions euclidiennes de $P(x)$ et $P'(x)$ par $(x - 2)$ sont égaux.
3) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 2)^2$ est $P'(2)(x - 2)$.
4) Si le reste de la division euclidienne de $P'(x)$ par $(x - 2)$ est nul, alors 2 est racine double de P.
5) Si le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 2)^2$ est $(x - 2)$, alors 2 est racine double de $P'(x)$

Remarque : Dans la 5ème proposition du point b), il est impossible que 2 soit racine double à la fois de $P(x)$ et de $P'(x)$. Dès lors, l'implicant de cette implication est faux. Ainsi, la proposition b)5) est vraie. Il y a donc 3 propositions vraies pour ce point et il suffisait d'en cocher deux pour avoir les points.

question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{3x+9} \geq \frac{x^2-3}{x^2+5x+6}.$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{2x+5} - \sqrt{2x+1}.$$

Analyse - Juillet 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Soit la fonction

$$f(x) = 4\,x + \frac{\sin^2 x}{x\,(1-\cos x)}.$$

a) Déterminer le domaine de f. Cette fonction est-elle paire ? Cette fonction est-elle impaire ?

b) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $x = 0$.

c) Trouver une fonction g continue sur $\mathbb{R}_0$ et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout x dans le domaine de f.

d) Déterminer toutes les asymptotes de la fonction g.

question 2

Soit la fonction

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}.$$

a) Calculer h' et h''.

b) Étant donné que le domaine de la fonction h est $[0,+\infty[$, trouver tous les extrémants locaux de h. Pour chacun d'entre eux, déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

c) Soit enfin la fonction

$$\ell(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2},$$

dont le domaine est $\mathbb{R}$. Trouver tous les maxima et minima locaux de $\ell(x)$.

Trigonométrie - Juillet 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés AB et BC sont tous deux de longueur a.
Notons α l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$.

a) Représenter schématiquement le triangle et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.

b) Exprimer l'aire du triangle, notée S, en fonction de a et α.

c) Sachant que $a = 3$ m et $\sin\alpha = 1/3$, évaluer S.

d) Dans le même cas, donner la valeur numérique de S évaluée au centimètre carré près.
Indication : $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$

e) Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis et à l'échelle.

question 2

Trouver *toutes* les solutions de l'équation trigonométrique suivante

$$3\,(\sin x + \cos x) - 4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = 0$$

et les représenter sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Juillet 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$. Soient A,B,C,D les points suivants

$$A(3,0,0) \qquad B(0,4,0) \qquad C(0,0,1) \qquad D(1,h,1)$$

où h est un paramètre réel.

a) Ecrire une équation cartésienne du plan $\pi = OCD$.
b) Ecrire des équations cartésiennes de la droite $d = AB$.
c) Déterminer la valeur de h pour laquelle π est parallèle à d. Fixer désormais h à cette valeur.
d) Donner les coordonnées du projeté orthogonal Q du point A sur π.
e) Calculer la distance entre le plan π et la droite d.

question 2

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.

Soit a une droite passant par $A(-1,0)$ et faisant un angle orienté θ avec l'axe Ox (c'est-à-dire $\theta = \measuredangle(Ox,a)$), et b une droite passant par $B(1,0)$ et faisant un angle orienté $\theta + \frac{\pi}{4}$ avec l'axe Ox (c'est-à-dire $\theta + \frac{\pi}{4} = \measuredangle(Ox,b)$), avec $0 \leq \theta < \pi$.

a) Montrez que les coefficients angulaires m_a de la droite a et m_b de la droite b vérifient l'égalité

$$m_b = \frac{1+m_a}{1-m_a} \qquad \text{pour } m_a \neq 1 \text{ et } m_b \neq -1.$$

b) Déterminez une équation cartésienne de la droite a (en fonction de m_a), puis une équation cartésienne de la droite b (également en fonction de m_a).
c) Pour chacune des deux équations déterminées au point b), exprimez m_a en fonction de x et y.
d) En égalant les deux expressions pour m_a obtenues au point c), déterminez une équation cartésienne et la nature du lieu parcouru par l'intersection P des droites a et b lorsque θ varie entre 0 et π.

Aide : Vérifiez la plausabilité de vos réponses au moyen d'une représentation graphique reprenant plusieurs valeurs particulières de θ.

Algèbre - Septembre 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Déterminer toutes les valeurs réelles de m pour lesquelles

$$(m+3)\,x^2 - 2\,(3m+1)\,x + (m+3) \geq 0, \quad \forall x > 0,$$

où x est réel.

question 2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$(2x^2+7x-2)^2 + 3\,(2x^2+7x-1) - 13 = 0.$$

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle de raison r telle que $u_5 = 1$ et $u_{10} = 4$. Calculer r et u_0.

c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle telle que $v_2 + v_3 + v_4 = 7$ et $v_6 = 4$. Calculer v_0.

d) Calculer $\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 4 + \ldots + 2^{27}\sqrt{2} - 2^{28}$.

Analyse - Septembre 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

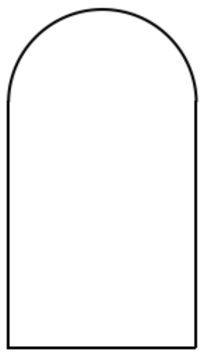
question 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

1) Déterminer le domaine de f. Cette fonction est-elle périodique ? Est-elle paire ? Est-elle impaire ?
2) Calculer les éventuelles asymptotes de f.
3) Calculer f'.
4) Combien de maxima la fonction f possède-t-elle ?
5) Déterminer la plus grande valeur prise par f.
6) Esquisser les graphes des fonctions $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et f.

question 2



On veut construire une fenêtre constituée d'un rectangle de base horizontale surmonté d'un demi-disque (voir dessin). Si l'on dispose de matériaux pour construire une fenêtre de 4m de périmètre. Caractérisez les dimensions de la fenêtre de surface maximale.

Trigonométrie - Septembre 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Soit un quadrilatère $ABCD$ tel que les longueurs des côtés AB et AD sont égales et notées a, les longueurs des côtés BC et CD sont égales et notées b, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont droits, et l'angle $\widehat{BAD}$ est aigu et noté θ. Notons c et d les longueurs des segments $[BD]$ et $[AC]$, respectivement.

a) Représenter schématiquement le quadrilatère et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.

b) Sur base du schéma précédent, montrer que $\sin\theta = c/d$.

c) Exprimer le périmètre du quadrilatère, noté P, en fonction de b et θ.

d) Sachant que $b = 1$ m et $\theta = \pi/3$, évaluer P.

e) Dans le même cas, donner la valeur numérique de P évaluée au centimètre près.
Indication : $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

f) Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis à l'échelle.

question 2

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique :

$$\tan^2 x - 3\,\frac{\tan x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

et représenter les solutions en x sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Septembre 2020

Attention : Les épreuves de 2020 ne sont pas caractéristiques de l'examen habituel en raison de la matière réduite et du format modifié suite à la situation sanitaire.

question 1

Dans le plan, on considère un triangle acutangle ABC inscrit à un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre d. Soit D le point diamétralement opposé à B sur le cercle, et soit P le point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{ABP} = \widehat{DBC}$.

a) Montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.

b) Montrer que les triangles ABP et DBC sont semblables.

c) Similairement, montrer que les triangles ABD et PBC sont semblables.

d) En utilisant les résultats précédents, montrer que

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

e) Finalement, en déduire l'égalité

$$|AC| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{d^2 - |BC|^2}}{d} + \frac{|BC| \cdot \sqrt{d^2 - |AB|^2}}{d}.$$

question 2

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$. On considère les points $A(0, -4, -\sqrt{2})$ et $B(2, 2, 3\sqrt{2})$, ainsi que la droite d d'équations paramétriques

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4 + 3\lambda \\ y & = & 3 + 4\lambda \\ z & = & \sqrt{2} \end{array} \right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

a) Ecrire des équations cartésiennes de la droite $d' = AB$.

b) Montrer que les droites d et d' sont sécantes, et déterminer leur intersection.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par les droites d et d'.

d) Déterminer des équations paramétriques de la perpendiculaire commune à d et d'.