Algèbre - Juillet 2019

question 1

a) Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$(2m-1)x^2 + 2(m-1)x + 3m$$

admette 2 racines réelles dont la somme des carrés est égale à 4.
Remarque : Il ne suffit pas de "deviner" une (ou plusieurs) valeur(s) de m. On attend un raisonnement qui montre qu'il n'y a pas d'autre(s) valeur(s) que celle(s) trouvée(s).

b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que les équations

$$2x^2 + ax + 2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x + \frac{a}{2} = 0$$

aient une solution réelle commune.

question 2

Résoudre, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - ay + a^2 z & = & a \\ ax - a^2 y + az & = & 1 \\ ax + y - a^3 z & = & -1 \end{array}\right. .$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$3\frac{x}{2} - 1 > -\sqrt{\frac{x^2}{2} - 3\frac{x}{2} + 5}.$$

Analyse - Juillet 2019

question 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{5\, e^{-2x^2}}{2 - |x|}$.

a) Déterminer le domaine de définition et la parité de f.

b) La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche de f en $x = 0$.

c) Déterminer les équations des asymptotes de f.

d) Calculer $f'(x)$.

e) Étudier le signe de $f'(x)$.

f) Combien le graphique de f possède-t-il de points de maximum ? de points de minimum ? Quelles sont leurs abscisses ?

g) Tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents, sachant que

$$\sqrt{3} \simeq 1,73; \quad e^{-3} \simeq 0,05; \quad e^{-4} \simeq 0,02 \quad \text{et} \quad e^{x} \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{pour } -1 < x < 1).$$

question 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère la courbe $C_1 \equiv y = 4 \tan \frac{x}{3}$ pour $0 \leq x < \frac{3\pi}{2}$ et la courbe $C_2 \equiv y = 8 \sin^2 \frac{x}{3}$ pour $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_1 au point d'abscisse 0.

b) Calculer $\displaystyle\int 8 \sin^2 \frac{x}{3}\, dx$.

c) Calculer l'aire A_1 de la surface comprise entre l'axe x et la courbe C_2 pour $0 \leq x < \frac{3\pi}{2}$.

d) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_1 et C_2 pour $0 \leq x < \frac{3\pi}{2}$.

e) Montrer que les courbes C_1 et C_2 sont tangentes au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$.

f) Calculer l'aire A_2 de la surface (bornée) comprise entre les courbes C_1 et C_2.

question 3

a) Calculer $\displaystyle\int \sin \sqrt{x}\, dx$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$.

Trigonométrie - Juillet 2019

question 1

Calculer, en justifiant chaque étape,

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right).$$

Pour rappel, arctg désigne la fonction arc tangente.

question 2

Soit un triangle ABC, rectangle en A, et soit D le point d'intersection de la droite BC avec la hauteur issue de A. On pose $p=\|\overrightarrow{BD}\|$, $q=\|\overrightarrow{CD}\|$ et $\alpha=\widehat{ABC}$. Montrer que

$$\sin^2\alpha=\frac{q}{p+q}.$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4(\sin x+\cos x)-8\sin x\cos x=5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.
Suggestion pour résoudre l'équation : poser $y=\sin x+\cos x$.

Géométrie - Juillet 2019

question 1

L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés $Oxyz$. Soient les points $P(2,1,0)$, $Q(-1,6,-1)$ et $R(1,-1,0)$.

a) Établissez des équations cartésiennes de la droite PQ.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan α contenant la droite PQ et passant par R.

c) Déterminez la distance entre la droite PQ et le point R.

d) Déterminez une équation cartésienne de tous les plans passant par la droite PQ et situés à une distance 1 de R.

question 2

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés Oxy. On considère les points $A(1,2)$ et $B(-1,2)$ ainsi qu'un point variable P parcourant le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminez la nature et des équations paramétriques du lieu géométrique parcouru par le centre du cercle circonscrit au triangle ABP (c'est-à-dire le cercle passant par les trois sommets du triangle).

question 3

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et P un point intérieur au triangle ABC.

Soit $A'B'$ la droite parallèle à AB passant par P et coupant AC en A' et BC en B'.

Soit $B''C''$ la droite parallèle à BC passant par P et coupant AB en B'' et AC en C''.

Soit $A'''C'''$ la droite parallèle à AC passant par P et coupant AB en A''' et BC en C'''.

Notons $\mathcal{A}_{ABC}$, $\mathcal{A}_{A'PC''}$, $\mathcal{A}_{PB'C'''}$ et $\mathcal{A}_{A'''B''P}$ les aires des triangles ABC, $A'PC''$, $PB'C'''$ et $A'''B''P$, respectivement. Montrez que

$$\sqrt{\mathcal{A}_{ABC}} = \sqrt{\mathcal{A}_{A'PC''}} + \sqrt{\mathcal{A}_{PB'C'''}} + \sqrt{\mathcal{A}_{A'''B''P}}$$

Algèbre - Septembre 2019

question 1

a) Déterminer toutes les valeurs de $p, q \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$x^2 + px + q$$

admette 2 racines réelles distinctes telles que chacune de ces racines augmentée de 1 soit solution de l'équation

$$x^2 - p^2x + pq = 0.$$

b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$4x^2 - 15x + 4a$$

admette deux racines réelles non nulles r_1 et r_2 telles que

$$\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2} = -\frac{33}{4}.$$

question 2

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0.$$

b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{C}$ pour que l'équation

$$z^2 - \alpha(1-i)z + 2\alpha - 2i = 0$$

admette 2 solutions complexes conjuguées. Calculer ces solutions.

question 3

Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que

$$-1 < \frac{x^2 - mx + 1}{3x^2 + 3x + 3} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analyse - Septembre 2019

question 1

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\cos x}{2\tan x - 2} & \text{si} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}); \\ 0 & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

a) Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle et la période éventuelle T de f.

b) Calculer $\ell_1 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x)$; $\ell_2 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x)$; $\ell_3 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x)$; $\ell_4 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x)$.

c) La fonction f est-elle continue en $x = \frac{\pi}{2}$? Justifier votre réponse à l'aide de la définition de la continuité de f en $x = \frac{\pi}{2}$.

d) La fonction f est-elle dérivable en $x = \frac{\pi}{2}$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée de f en $x = \frac{\pi}{2}$.

e) Calculer $f'(x)$.

f) Étudier le signe de $f'(x)$ dans $[0, 2\pi]$.

g) Déterminer les coordonnées des points de maximum de f et les coordonnées des points de minimum de f dans $]0, 2\pi[$.

h) Tracer le graphique de f dans $[0, 2\pi]$ en utilisant les résultats précédents.

question 2

Calculer

a) $\displaystyle\int_{-6}^{6} \frac{19 + 20\sin^7 x}{x^2 + 36}\, dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{x - \sin x}{e^x} dx$.

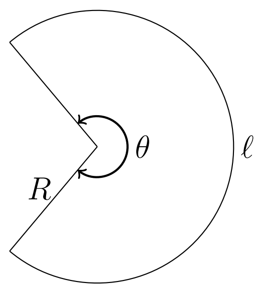
question 3

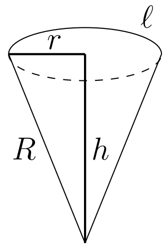
Dans un disque métallique de rayon R, on découpe un secteur circulaire d'angle au centre θ afin d'obtenir un cône circulaire de rayon r et de hauteur h.

a) Exprimer r en fonction de R et de θ.

b) Calculer le volume V du cône en fonction de R et de θ.

c) Pour quelle valeur de θ le volume du cône est-il maximum ?





Trigonométrie - Septembre 2019

question 1

Sachant que

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4},$$

calculer $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

question 2

Soit P_1, P_2, $\ldots$, P_n les sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés (où $n \geq 3$). Notons A_e l'aire de ce polygone et a la longueur d'un de ses côtés. Définissons les points P_1', P_2', $\ldots$, P_n' comme les milieux des côtés P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{n-1}P_n$ et P_nP_1, respectivement, et notons A_i l'aire du polygone régulier à n côtés de sommets P_1', P_2', $\ldots$, P_n'.

(a) Calculer A_e et A_i.

(b) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_i}{A_e}.$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x}=\cos x$$

en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans l'intervalle $[-\pi,\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Septembre 2019

question 1

Si le périmètre d'un triangle rectangle vaut p et la somme des carrés de ses trois côtés vaut $2q^2$, où p et q sont deux paramètres réels positifs, déterminez la longueur de la hauteur issue de l'angle droit en fonction de p et q.

question 2

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés Oxy. Soit P un point variable de ce plan, de coordonnées (x_P, y_P).

a) Déterminez, en fonction de x_P et y_P, les coordonnées des points A et B tels que $OAPB$ est un carré dont OP est une des diagonales.

b) Déduisez-en la nature et une équation cartésienne des lieux parcourus par les points A et B lorsque le point P parcourt le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1.

question 3

L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés $Oxyz$. Soit d la droite d'équations cartésiennes

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ax \\ z & = & b \end{array} \right.$$

où a et b sont des paramètres réels strictement positifs.

a) Soit $P(x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal P' de P sur la droite d (considérez x_P, y_P et z_P comme des paramètres réels quelconques).

b) Etablissez des équations paramétriques de la droite perpendiculaire à d passant par P.

c) Déduisez-en les coordonnées du symétrique Q du point P par rapport à d.

d) On considère les droites suivantes :

$$d' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ax \\ z & = & -b \end{array} \right. \qquad d'' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -ax \\ z & = & b \end{array} \right. \qquad d''' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -ax \\ z & = & -b \end{array} \right.$$

Déterminez les coordonnées des points Q', Q'' et Q''', symétriques du point P par rapport aux droites d', d'' et d''' (respectivement).

Aide : Repartez de la solution du point (c), en utilisant la similitude entre les équations des différentes droites.

e) Montrez que les points Q, Q', Q'' et Q''' sont coplanaires.

f) Etablissez une équation cartésienne d'un plan contenant les points Q, Q', Q'' et Q'''. Quelle condition doivent vérifier les coordonnées (x_P, y_P, z_P) du point P pour qu'un tel plan soit unique ?