Algèbre - Juillet 2018

question 1

On considère le polynôme

$$x^3 + (7 - 4i)x^2 + (9 - 16i)x - 9 - 12i$$

a) Montrer que ce polynôme admet une racine réelle.

b) En déduire les autres racines complexes de ce polynôme.

question 2

Déterminer, en discutant en fonction du paramètre réel m, le nombre et le signe des racines réelles du polynôme $x^2 + 2(2m + 1)x + (2m^2 + 5m + 2)$.

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x + \frac{1}{2}}.$$

Analyse - Juillet 2018

question 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + 2\ln\left|\sqrt{|x|} - 1\right|$.

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de la fonction f.

b) La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée de f en $x = 0$.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse 4.

e) Déterminer les coordonnées des points de maximum, des points de minimum et des points d'inflexion de f. Justifier vos réponses.

f) Tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents.
Indication : On pourra utiliser l'approximation $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (-1 < x < 1)$.

question 2

a) Calculer :

1) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} |\sin(30x)|\, dx$;
2) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \sin|30x|\, dx$;
3) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \sin^7(30x)\, dx$;
4) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \big|\cos|30x|\big|\, dx$.

b) Soit l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^2 x^p(2-x)^q\, dx \quad (p, q \in \mathbb{N})$.

1) Calculer $I_{0,8}$.
2) Établir une formule exprimant $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p-1,q+1}$, p et q.
3) En déduire $I_{2,6}$.

question 3

Une statue de 9 mètres de hauteur est placée sur un socle de 16 mètres de hauteur. À quelle distance du pied du socle faut-il placer un appareil photographique pour que l'angle α sous lequel on voit la statue soit le plus grand possible (le socle et la statue seront assimilés à des segments verticaux superposés, le sol sera supposé horizontal et l'angle sera mesuré au sol) ?

Trigonométrie - Juillet 2018

question 1

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\theta \neq 0$, on a

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

question 2

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier convexe. Notons α l'amplitude de l'angle $\widehat{ABC}$ et β l'amplitude de l'angle $\widehat{ACE}$. Calculer

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique, sachant que $\sqrt{3} \approx 1.732$.

Géométrie - Juillet 2018

question 1

Soit $ABCD$ un quadrilatère plan quelconque, et I, J, K, L les milieux des côtés AB, BC, CD, et DA, respectivement.

Démontrez vectoriellement les affirmations suivantes :

a) $IJKL$ est un parallélogramme tel que

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

b) Les diagonales de $ABCD$ et de $IJKL$ satisfont l'égalité

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = 2\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{JL}\right\|^2$$

question 2

L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés $Oxyz$. Soit A le point de coordonnées $(1, 3, \alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre variable, et soit d la droite d'équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

a) Donnez des équations cartésiennes de la droite $d' = OA$.

b) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont sécantes ? Si oui, déterminez l'intersection P de ces droites pour cette valeur.

c) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont orthogonales ? Si oui, déterminez cette valeur.

d) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont parallèles ? Si oui, déterminez cette valeur.

e) On fixe maintenant $\alpha = 1$. Déterminez les équations cartésiennes des plans π et π' tels que $d \subset \pi$, $d' \subset \pi'$ et $\pi \parallel \pi'$.

question 3

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soient A' le symétrique du point A par rapport à la droite BC, B' le symétrique du point B par rapport à la droite AC, et C' le symétrique du point C par rapport à la droite AB. Soient P le pied de la perpendiculaire à BC abaissée de A, et P' le pied de la perpendiculaire à $B'C'$ abaissée de A'.

a) Calculez la longueur d' du segment $[A'P']$ en fonction de la longueur d du segment $[AP]$.

b) Calculez l'aire S' du triangle $A'B'C'$ en fonction de l'aire S du triangle ABC.

Algèbre - Septembre 2018

question 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\left\{\begin{array}{rcr} (m+1)x+y+z & = & m+1 \\ x+(m+1)y+z & = & m+3 \\ x+y+(m+1)z & = & -2m-4 \end{array}\right.$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

question 2

Déterminer toutes les valeurs possibles du paramètre a pour qu'une des racines du polynôme $x^2-4(a-1)x-20$ soit la somme des carrés des racines du polynôme x^2+2x-a.

question 3

On considère un polynôme $P(x)$ tel que sa division par $(x-1)$ donne pour reste -30 et que sa division par $(x-2)$ donne pour reste -54.

a) Déterminer le reste de sa division par x^2-3x+2.

b) Déterminer le polynôme $P(x)$ sachant qu'il est du quatrième degré et qu'il est divisible par $x(x^2+5)$.

Analyse - Septembre 2018

question 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\cos x\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle et la période T de f.

b) Déterminer les zéros de f sur $[0, \pi]$.

c) Calculer $f'(x)$.

d) Déterminer sur $[0, \pi]$ les coordonnées des points de maximum de f et les coordonnées des points de minimum de f. Justifier votre réponse.

e) Déterminer, sous la forme la plus simple possible, une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $\arccos \dfrac{2}{3}$.

f) Tracer le graphique de f dans $[-\pi, \pi]$ en utilisant les résultats précédents.
Indication : On pourra utiliser l'approximation $\arccos x \simeq \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 \quad (-\dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4})$.

question 2

a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère le graphique de la fonction f définie par $f(x) = 3\sin^3 x - \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2})$.

   1) Calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   2) Calculer l'aire A de la surface comprise entre la droite $y = 0$, le graphique de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Calculer $\displaystyle\int \frac{(\ln \sqrt[3]{x})^2}{x^5}\,dx$.

question 3

Un trapèze isocèle $ABCD$ dont les côtés AB et DC sont parallèles est tel que les longueurs de ses côtés satisfont :

$$\|BC\| = \|CD\| = \|DA\| = 20 < \|AB\|.$$

Soit $\alpha = \widehat{ABC}$. Pour quelle valeur de α l'aire de ce trapèze est-elle maximale et quelle est la valeur de cette aire maximale ?

Trigonométrie - Septembre 2018

question 1

Soit la relation
$$\cot\theta - \cot 2^n\theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 4\theta + \ldots + \operatorname{cosec} 2^n\theta$$
où $\cot\theta = 1/\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\sin 2^n\theta \neq 0$. Démontrer cette relation pour

(i) $n = 1$

(ii) $n = k + 1$ (où k est un naturel non nul quelconque), en supposant qu'elle est vraie pour $n = k$

question 2

Soit un losange $ABCD$ dont le côté est de longueur x. Notons M le milieu du segment $[AB]$, M' le milieu du segment $[BC]$ et α l'amplitude de l'angle $\widehat{BCD}$. Exprimer l'aire et le périmètre du triangle $MM'D$ en fonction de x et α.

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique
$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$
Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Septembre 2018

question 1

On considère un parallélogramme de sommets consécutifs $PQRS$ tel que le point d'intersection T des bissectrices des angles $\widehat{PQR}$ et $\widehat{QRS}$ appartient au segment $[PS]$.

Sachant que $|QT| = a$ et $|RT| = b$, calculez l'aire du parallélogramme.

question 2

L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés $Oxyz$.

Soient A, B, C les points de coordonnées respectives $(1, 0, -2)$, $(0, 1, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 2, 0)$.

a) Déterminez une équation cartésienne du plan $\alpha = OAB$.

b) Déterminez des équations cartésiennes de la droite $d = OC$.

c) Déterminez une équation cartésienne du plan β perpendiculaire au plan α et passant par d.

d) Déterminez une équation cartésienne du plan γ passant par O et perpendiculaire à la fois à α et β.

e) Sachant que α, β et γ constituent trois des faces d'un cube de côté 4 et que les plans α' (parallèle à α), β' (parallèle à β) et γ' (parallèle à γ) constituant les trois autres faces coupent l'axe Oy en des points d'ordonnée positive, déterminez des équations cartésiennes des plans α', β' et γ'.

f) Déterminez les coordonnées du point O' opposé au point O sur le cube.

question 3

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés Oxy.

Soit Γ_1 le cercle de centre $C_1(1, 0)$ et de rayon 2, et soit Γ_2 le cercle de centre $C_2(-1, 0)$ et de rayon 1. Soit $P(x, y)$ un point variable du plan.

a) Exprimez la distance $d(P, C_1)$ entre les points P et C_1 en fonction de x et y.

b) De là, exprimez la distance $d(P, \Gamma_1)$ entre le point P et le cercle Γ_1 en fonction de x et y, pour chacun des cas suivants :

   1) le point P est intérieur au cercle Γ_1.

   2) le point P est extérieur au cercle Γ_1.

   Note : La distance entre un point et un cercle est définie comme la distance minimale entre ce point et un point du cercle.

c) Mêmes questions pour le cercle Γ_2.

d) Déduisez-en une équation cartésienne et la nature du lieu des points équidistants des cercles Γ_1 et Γ_2 (si le lieu est constitué de plusieurs parties, donnez l'équation et précisez la nature de chaque partie).