Algèbre - Juillet 2017

question 1

Déterminer en fonction du paramètre réel a,
tous les polynômes $P(x) = x^3 - a x^2 + a^2 x + a$ tels que le reste de la division de P par $x + a$ vaut le triple du reste de la division de P par $x - a$.

question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sqrt{x^2 + 3x - 4} - x > 1$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + m y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases}$$

Analyse - Juillet 2017

question 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Déterminer les zéros de f.
3) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f.
4) Calculer $f'(x)$.
5) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse 0.
6) Déterminer les zéros de f'.
7) Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents.

question 2

1) Calculer $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2 - x - 2}\, dx$.
   Aide : commencer par effectuer la division de $2x^3$ par $x^2 - x - 2$.
2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ possédant une dérivée seconde continue. On pose

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx, \qquad K = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos x \, dx,$$
$$L = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin x \, dx, \qquad M = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) + f''(x)\big) \sin x \, dx.$$

   a) Calculer K en fonction de J, $f(-\pi)$ et $f(\pi)$.
   b) Calculer K en fonction de L.
   c) Calculer M en fonction de $f(-\pi)$ et $f(\pi)$.
   d) Calculez M lorsque $f(x) + f''(x) = \sin x$.
   e) Dans le cas où $f(x)+f''(x) = \sin x$, l'égalité $f(-\pi) = f(\pi)$ est-elle possible ? Justifiez votre réponse.

question 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère le point $P(2, 4)$. Déterminer l'équation de la droite de coefficient angulaire négatif et passant par P qui délimite avec les axes x et y une surface d'aire minimale.

Trigonométrie - Juillet 2017

question 1

Un ingénieur souhaite déterminer la hauteur d'un gratte-ciel en mesurant la longueur de son ombre. A midi, la direction du soleil forme un angle θ par rapport à l'horizon (angle d'élévation) et l'ombre s'étend à 150 mètres de la base du gratte-ciel. A un certain instant dans l'après-midi, lorsque le soleil a baissé dans le ciel et l'angle d'élévation prend une valeur moitié de celle qui était observée à midi, l'ombre du gratte-ciel couvre une distance de 400 mètres. Quelle est la hauteur de ce gratte-ciel ?

Indication : On assimile ici le gratte-ciel à un segment vertical touchant le sol en l'une de ses extrémités. Le sol est supposé parfaitement horizontal.

question 2

Exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$. Discuter suivant la valeur de θ.

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin x + \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Juillet 2017

question 1

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1, 1, 0)$ et $B(0, 0, h)$, où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre variable.

a) Déterminez des équations paramétriques de la droite AB.
b) Déterminez les coordonnées du point P, projeté orthogonal du point O sur la droite AB.
c) Déterminez une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite OP et passant par la droite AB.
d) Déterminez des équations paramétriques du plan σ, plan médiateur du segment $[AB]$.
e) Déterminez les coordonnées d'un point Q du plan π tel que le triangle ABQ est équilatéral.

question 2

Dans le plan euclidien rapporté au système d'axes orthonormés Oxy, on considère un point variable P sur le cercle de centre $C(2, 0)$ et de rayon unité. Déterminez la nature et une équation cartésienne du lieu parcouru par le point Q si le triangle OPQ est isocèle et rectangle en O.

Justifiez votre réponse.

question 3

On considère un tétraèdre régulier $PQRS$ de l'espace euclidien, et un plan π passant par les points P et Q.

Déterminez l'angle α entre le plan π et la base PQR du tétraèdre sachant que ce plan divise le tétraèdre en deux parties de même volume.

Algèbre - Septembre 2017

question 1

Considérons le polynôme à coefficients réels $Q(x) = x^3 - 13x + \mu$.
Sachant que l'une des racines de Q est le tiers d'une autre, déterminer toutes les valeurs possibles des racines de Q. En déduire la (ou les) valeur(s) correspondante(s) de μ.

question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} 2x + my + z = 3m \\ x - (2m+1)y + 2z = 4 \\ 5x - y + 4z = 3m - 2 \end{cases}$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$

Analyse - Septembre 2017

question 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{4}\, e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites à gauche et à droite de f en 1 et en -1.
3) Calculer $f'(x)$.
4) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f.
5) Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, déterminer les coordonnées des points de maximum et des points de minimum de f.
6) Tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ si $-1 < x < 1$).

question 2

1) Calculer $\displaystyle\int \arcsin 17x \; dx$.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère la courbe $C_1 \equiv y = 2x^3$ et la courbe $C_2 \equiv y = 2x^3 + \dfrac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}$ $\quad (x > 1)$.
   a) Calculer $\displaystyle\int \frac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2} \quad dx$.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes C_1 et C_2.
   c) Calculer l'aire A de la surface comprise entre les deux courbes et les droites $x = \frac{4}{3}$ et $x = 2$.

question 3

On dispose de deux sources lumineuses. L'une est placée en un point P et est d'intensité lumineuse p candelas et l'autre est placée en un point Q et est d'intensité lumineuse q candelas. La distance entre les points P et Q est 4 mètres. Sachant que l'éclairement E en lux en un point de $[P, Q]$ situé à une distance d d'un point d'intensité lumineuse I est donnée par la formule $E = \dfrac{I}{d^2}$ (E en lux, I en candelas et d en mètres) et que les éclairements des deux sources s'additionnent, déterminer à quelle distance du point P est situé le point A de $[P, Q]$ le plus faiblement éclairé.

Trigonométrie - Septembre 2017

question 1

Un marin voudrait déterminer la hauteur du mât de son voilier à l'aide d'une corde d'une longueur de 16 mètres. Il tend la corde en la faisant coulisser dans une poulie attachée au sommet du mât. Les points d'attache des deux extrémités de la corde sur le pont du voilier se trouvent à 6 mètres devant et 2 mètres derrière le pied de mât. Déterminer la longueur des deux segments de corde reliant la poulie à chacun des points d'attache, et en déduire la hauteur du mât. Ensuite, calculer le sinus de l'angle que forme le coude de la corde au sommet du mât.

Indication : On néglige l'élasticité de la corde et l'on assimile les deux segments de corde à des segments de droite. On néglige les dimensions de la poulie, que l'on assimile à un point situé au sommet du mât.

question 2

Calculer cos(202,5°)

a) exactement ;

b) numériquement en en donnant une valeur approchée à 10% près.

Vérifier ce dernier résultat graphiquement.

Conseil : utiliser le développement de Taylor au second ordre, pour x proche de a,

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a).$$

question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en spécifiant les conditions d'existence :

$$2\sin^2\alpha \cot\alpha + \sin 3\alpha + \sin\alpha = 0$$

et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Géométrie - Septembre 2017

question 1

On considère un triangle équilatéral PQR de l'espace euclidien. Soit P' le point situé aux deux-tiers du segment $[PQ]$, Q' le point situé aux deux-tiers du segment $[QR]$, et R' le point situé aux deux-tiers du segment $[RP]$.

Déterminez le rapport entre les aires des triangles $P'Q'R'$ et PQR.

question 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ et $D(1,\sqrt{2},1)$.

a) Déterminez une équation cartésienne du plan α passant par A, B et C.

b) Déterminez des équations paramétriques de la droite d passant par O, faisant un angle $\pi/3$ avec Ox et $\pi/4$ avec Oy, et coupant le premier octant du système d'axes orthonormés. Rappel : le premier octant est constitué des points de coordonnées (x,y,z) tels que $x>0$, $y>0$ et $z>0$.

c) Déterminez des équations cartésiennes de la droite d' projetée orthogonale de la droite OD sur α.

d) Déterminez une équation cartésienne du plan α' perpendiculaire à α et contenant la droite OD.

question 3

Dans le plan euclidien rapporté au système d'axes orthonormés Oxy, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$, avec $p>0$, et des points variables A et B de cette parabole, tels que l'ordonnée de A est $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et celle de B est $\mu \in \mathbb{R}^-$.

a) Déterminez, en fonction des paramètres λ et μ, les coordonnées du centre C du cercle circonscrit au triangle OAB.

b) Déterminez la relation que doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB passe par le foyer F de $\mathcal{P}$.

c) En utilisant $\alpha = \lambda + \mu$ comme paramètre, établissez des équations paramétriques du lieu parcouru par C lorsque A et B se déplacent sur $\mathcal{P}$ de sorte que la droite AB passe par F.

d) Donnez une équation cartésienne et la nature de ce lieu.