

## Algèbre - Juillet 2016

### question 1

1) Factoriser au maximum dans  $\mathbb{C}$ , le polynôme

$$x^7 + 48x^2 + 16 + 3x^5 - (x^4 + 3x^6 + 16x^3 + 48x)$$

2) Donner un exemple de polynôme ayant au moins un coefficient complexe non réel, admettant exactement 2 racines réelles et 2 racines complexes non réelles (les 4 racines étant distinctes deux à deux). Justifier brièvement votre choix.

3) a) Déterminer les valeurs des paramètres réels  $m$  et  $p$  pour que le polynôme  $P(x) = x^3 - 3mpx + m^3 + p^3$  soit divisible par  $x + m + p$

b) Pour les valeurs de  $m$  et  $p$  trouvées au a), déterminer le quotient de la division de  $P(x)$  par  $x + m + p$

### question 2

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{7\pi}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \lambda \end{pmatrix} \text{ est-elle inversible ?}$$

b) Calculer la matrice inverse de  $M_\lambda$  pour  $\lambda = \frac{\pi}{6}$  et simplifier au maximum la réponse.

### question 3

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , en discutant en fonction du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  l'inéquation

$$4a + 4 \leq x^2 < 2x + 2ax$$

Indiquer un résumé final de la discussion, les réponses étant simplifiées au maximum.

## Analyse - Juillet 2016

### question 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} 1 + 2e^{1/\ln|x|} & \text{si } x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1; \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- La fonction  $f$  est-elle continue en  $x = 0$ ? Justifier votre réponse.
- La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en  $x = 0$ ? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée à droite de  $f$  en  $x = 0$ .
- Calculer la limite à gauche et la limite à droite de  $f$  en 1.
- Déterminer les éventuelles asymptotes de  $f$ .
- Calculer  $f'(x)$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de  $f$  au point d'abscisse  $e$ .
- Après avoir étudié le signe de  $f'(x)$ , tracer le graphique de  $f$  en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation  $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ ).

### question 2

Calculer (en justifiant les calculs)

- $\int \frac{\sin^3 4x}{\cos^8 4x} dx$ ;
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 e^{\cos x} - 2x) \sin x dx$ .

### question 3

Une fenêtre possédant cinq côtés et un axe de symétrie vertical est formée d'un rectangle de base horizontale et de hauteur  $h$  mètres surmonté d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur de chaque côté de l'angle droit est  $c$  mètres. Si le périmètre de la fenêtre est 8 mètres, calculer  $h$  et  $c$  pour qu'elle ait une aire maximale.

## Trigonométrie - Juillet 2016

### question 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$\operatorname{cosec}^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cotg x - (1 + \sqrt{3}) = 0$$

### question 2

Dans  $\mathbb{R}$ , trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$$

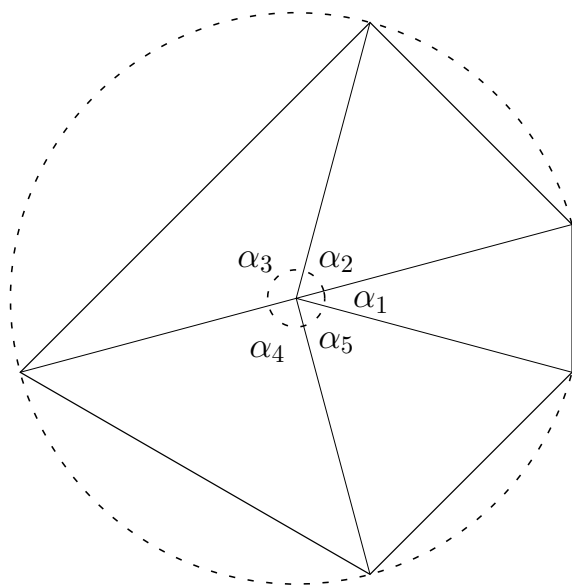
Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle  $[-\pi, \pi[$

### question 3

Soit  $\mathcal{P}$  le pentagone inscrit dans un cercle de rayon  $R$  représenté ci-contre.

Calculer le périmètre de  $\mathcal{P}$  en fonction de  $R$  sachant que

$\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ ,  $\alpha_3 = 120^\circ$  et  $\alpha_4 = 90^\circ$ .



## Géométrie - Juillet 2016

### question 1

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés  $Oxy$ .

Soit dans ce plan une ellipse dépendant d'un paramètre réel  $a > 0$ , de grand axe parallèle à l'axe  $Ox$  et de longueur  $2a$ , et de petit axe parallèle à l'axe  $Oy$  et de longueur  $a$ .

Déterminez la nature et une équation cartésienne du lieu parcouru par le centre de cette ellipse lorsque  $a$  varie dans  $\mathbb{R}$  et que l'ellipse reste tangente à la fois à l'axe  $Ox$  et à la droite d'équation  $y = x$ .

### question 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés  $Oxyz$ , on donne les points  $A(-1, 0, 0)$ ,  $B(0, -2, 0)$ ,  $C(0, 0, -2)$  et  $D(1 + r, 1 - r, 1 + r)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  est un paramètre.

- Donnez des équations cartésiennes de la droite  $AB$ .
- Donnez des équations cartésiennes du plan  $\alpha$  décrit par la droite  $CD$  lorsque  $r$  varie dans  $\mathbb{R}$ .
- Déterminez la valeur de  $r$  pour laquelle les droites  $AB$  et  $CD$  sont coplanaires, ainsi que des équations paramétriques de leur plan commun pour cette valeur de  $r$ .
- Déterminez la valeur de  $r$  pour laquelle  $AB$  et  $CD$  sont orthogonales, ainsi que la distance entre ces deux droites pour cette valeur de  $r$ .

### question 3

Soit  $\mathcal{S}$  une sphère de rayon unité dans l'espace euclidien.

- Calculez la longueur  $c$  des côtés d'un cube inscrit à la sphère  $\mathcal{S}$  (c'est-à-dire un cube donc chacun des sommets appartient à la sphère).
- Même question pour un tétraèdre régulier (polyèdre à 4 sommets dont chacune des 4 faces est un triangle équilatéral).

## Algèbre - Septembre 2016

### question 1

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $x^6 - 1 = 0$
- 2) Si  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes tels que  $a + b \in \mathbb{R}$  et  $(a^3 + b^3) \in \mathbb{R}$ , déterminer les conditions sur  $a$  et  $b$  pour que  $a^2 - ab + b^2$  soit un complexe non réel.

### question 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$ , le système

$$\begin{cases} m^2x - my + z = -1 \\ x - my + mz = -m \\ mx - my + z = -1 \end{cases}$$

### question 3

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , en discutant en fonction des paramètres  $m, k \in \mathbb{R}$ , l'équation

$$x + \frac{\frac{k}{1 - \frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} = m$$

## Analyse - Septembre 2016

### question 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 3 e^{\frac{1}{2} \operatorname{tg} x} \cos x$ .

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
- Déterminer la parité éventuelle et la période éventuelle de  $f$ .
- Calculer les limites à gauche et à droite de  $f$  en  $\frac{\pi}{2}$  et en  $\frac{3\pi}{2}$ .
- Calculer  $f'(x)$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de  $f$  au point d'abscisse  $\pi$ .
- Déterminer les zéros de  $f'$ .
- Après avoir étudié le signe de  $f'(x)$ , tracer le graphique de  $f$  dans  $[0, 3\pi]$  en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation  $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ ).

### question 2

Calculer (en justifiant les calculs)

- $\int \frac{2 + \ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;
- $\int_0^{1,8} x [x^2] dx$  où  $[x]$  désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $x$ .

### question 3

Une entreprise fabrique des objets à partir de plaques d'acier. Lors de la fabrication, il reste des morceaux. Chaque morceau peut être décrit, dans un repère orthonormé bien choisi  $Oxy$ , comme étant la région comprise entre la parabole d'équation  $y = x^2$  et la droite d'équation  $y = 9$ . On souhaite récupérer de chaque morceau une plaque rectangulaire dont deux sommets sont situés sur la parabole et les deux autres sur la droite d'équation  $y = 9$ . Calculer l'aire maximale d'une telle plaque rectangulaire.

## Trigonométrie - Septembre 2016

### question 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$\cos 3\theta + (1 - \sqrt{3}) \cos 2\theta + (1 - \sqrt{3}) \cos \theta + 1 = 0$$

### question 2

Résoudre l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = 2 - 2 \cos x$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  sur le cercle trigonométrique.

### question 3

Sachant que les coordonnées de Bruxelles sont  $50, 85^\circ$  de latitude Nord et  $4, 35^\circ$  de longitude Est et que celles de Lagos au Nigéria sont  $6, 52^\circ$  de latitude Nord et  $3, 38^\circ$  de longitude Est, calculer la distance la plus courte parcourue sur la Terre entre ces deux villes en assimilant la Terre à une sphère parfaite de 6000 km de rayon. On demande d'exprimer la valeur de la réponse numérique à 10% près et d'approcher les fonctions de petits arguments par leur développement de Taylor au premier ordre :  $f(x) \approx f(0) + x f'(0)$

### Rappel :

- Pour un point  $P$  situé sur le globe terrestre, la latitude est l'angle entre le plan de l'équateur et la demi-droite dont l'origine est le centre de la Terre et qui passe par le point  $P$ . Cet angle est compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (Nord ou Sud).
- La longitude est l'angle formé par le plan du méridien de Greenwich et le plan comprenant l'axe de rotation de la Terre (axe Nord-Sud) et le point  $P$ . Cet angle est compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  (Est ou Ouest).

## Géométrie - Septembre 2016

### question 1

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés  $Oxy$ .

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $C(2, 0)$  et de rayon 1. Soit  $\mathcal{D}$  un cercle variable tangent extérieurement à  $\mathcal{C}$  et passant par  $O$ .

Déterminez la nature et une équation cartésienne du lieu parcouru par le centre  $D$  de  $\mathcal{D}$ .

### question 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés  $Oxyz$ , on donne les points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 2, 0)$ ,  $C(1, 2, 3)$  et  $D(3, 2, 1)$ .

- Donnez des équations paramétriques de la droite  $AB$ .
- Donnez des équations cartésiennes de la droite  $CD$ .
- Donnez une équation cartésienne du plan  $\alpha$  parallèle à  $AB$  et passant par  $CD$ .
- Donnez des équations paramétriques de la perpendiculaire commune à  $AB$  et  $CD$ .
- Calculez la distance entre le plan  $\alpha$  et la droite  $AB$ .

### question 3

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés  $Oxyz$ , soit  $\mathcal{C}$  le cylindre de rayon unité centré sur l'axe  $Oz$  et  $\pi$  un plan passant par l'axe  $Ox$  et faisant un angle  $\theta$  avec le plan  $Oxy$ . On considère l'ellipse  $\mathcal{E}$  formée par l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\pi$ .

Déterminez, en fonction de  $\theta$

- la longueur  $a$  du grand axe de  $\mathcal{E}$ ,
- la longueur  $b$  du petit axe de  $\mathcal{E}$ ,
- les coordonnées des foyers de  $\mathcal{E}$ .