

Algèbre - Juillet 2015

Question 1

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le polynôme $x^4 + mx^3 + m^2x^2 + m^3x + 1$

- a) est-il divisible par $(x + 1)^2$?
- b) est-il une fonction paire ?

Question 2

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $(k + 2)x^2 - 2kx + 2k - 3 = 0$ admet-elle

- a) 2 solutions complexes distinctes ?
- b) 2 solutions réelles distinctes dont le produit vaut 1 ?

Question 3

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ x - 2ay + z = -2 \\ ax - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Analyse - Juillet 2015

Question 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x \ln |x|)^3 & \text{si } x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- f est-elle paire, impaire? Justifier.
- Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.
- Que vaut la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
- f est-elle continue en $x = 0$? Justifier.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.
- Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisses. Justifier.
- En utilisant l'approximation $\frac{1}{e} \approx 0,36$, esquisser le graphe de f , en indiquant les différents points apparaissant dans les réponses précédentes.

Question 2

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int x \operatorname{arctg}(3x) dx$

b) $\int_0^5 |x^4 - 1| dx$

Question 3

Dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on inscrit un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Si on veut maximiser l'aire de ce rectangle, quelles doivent être les coordonnées de ses 4 sommets?

Trigonométrie - Juillet 2015

Question 1

Résoudre dans \mathbb{R}

$$\operatorname{Arccos}(2x) - \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{3}$$

Question 2

Un agriculteur désire connaître les dimensions de son champ de forme triangulaire. Deux de ses côtés ont 100 m et 200 m de long et forment un angle de $22,5^\circ$. En supposant plane la surface de ce champ, calculez la longueur du troisième côté ainsi que l'aire du champ.

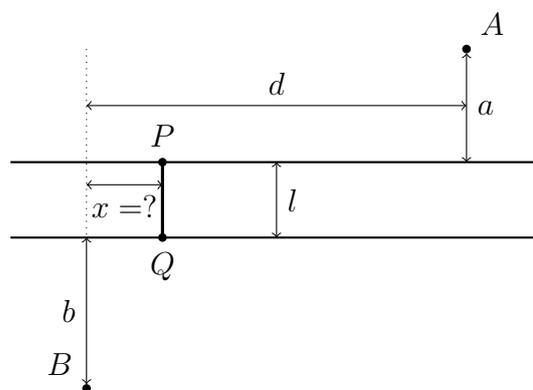
Indication : N'évaluez les valeurs numériques qu'à la fin des développements analytiques et effectuez les calculs à 10% près.

Géométrie - Juillet 2015

Question 1

Deux villes A et B sont séparées par une rivière rectiligne de largeur l , située à une distance a de A et b de B . Les droites perpendiculaires à la rivière abaissées de A et B sont éloignées d'une distance d . On souhaite placer un pont perpendiculaire à la rivière reliant un point P de la berge du côté de A à un point Q de la berge du côté de B , de sorte que la distance entre A et P soit égale à la distance entre B et Q .

- Calculez la distance x entre le pont et la perpendiculaire à la rivière abaissée de B , en fonction de a, b, d et l .
- Prouvez que le point P doit se trouver sur la médiatrice du segment $[AC]$, où C est le point tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QP}$.



Question 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne le point $P(1, 0, -1)$, le plan $\pi \equiv x - 2y + z = 0$ et les droites

$$a \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad b \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

- Etablissez des équations paramétriques de la droite c passant par P , parallèle à π et coupant la droite a .
- Etablissez des équations cartésiennes de la droite d passant par P et coupant les droites a et b .

Question 3

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy . Soit \mathcal{C}_0 le cercle de centre O et de rayon 3. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles de rayons fixes 1 et 2, respectivement, se déplaçant à l'extérieur de \mathcal{C}_0 en restant non seulement tangents à celui-ci mais aussi tangents entre eux (le centre de \mathcal{C}_1 étant extérieur à \mathcal{C}_2).

- Déterminez les longueurs des côtés du triangle OPQ , où P est le centre de \mathcal{C}_1 et Q est le centre de \mathcal{C}_2 .
- En déduire les angles de ce triangle.
- Soit R le centre du cercle circonscrit au triangle OPQ . Identifiez la nature du lieu parcouru par R lorsque \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se déplacent sur \mathcal{C}_0 , et donnez une équation cartésienne de ce lieu.

Algèbre - Septembre 2015

Question 1

Résoudre dans \mathbb{R} , en discutant en fonction du paramètre réel a , l'équation

$$\frac{2x + a}{x} - \frac{2x}{x + a} = 2$$

Question 2

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} mx + (1 - m)y + (1 - m)z = m^2 \\ mx + (1 + m)y + (1 + m)z = m - m^2 \\ x + y + z = 1 - m \end{cases}$$

Question 3

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & e^{-k} & e^{-2k} \\ e^k & -e & e^k \\ e^{2k} & e^{-k} & 1 \end{pmatrix} \text{ est-elle inversible ?}$$

b) Calculer la matrice inverse de A_k pour $k = \ln 2$ (la réponse finale étant une matrice simplifiée au maximum et ne contenant aucun exposant)

Analyse - Septembre 2015

Question 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 e^{-|x|}$ pour tout x réel

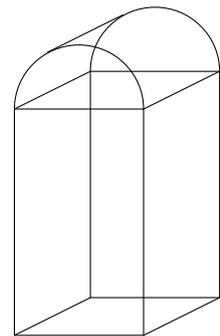
- f est-elle paire? impaire? Justifier.
- Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.
- Déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f .
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.
- Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisses.
- Esquisser le graphe de f , en indiquant les différents points apparaissant dans les réponses précédentes.

Question 2

- $\int_{10\pi}^{21\pi} \sin 5x (\cos 5x)^6 dx$
- $\int \frac{1}{1 + e^{6x}} dx$

Question 3

On veut construire une citerne ayant un volume V donné. Elle doit avoir la forme d'un parallépipède rectangle de hauteur h et à base carrée de côté c , surmonté d'un demi-cylindre de rayon $c/2$ (voir figure). Pour quelles valeurs de c et h l'aire totale de cette citerne est-elle minimum?



Trigonométrie - Septembre 2015

Question 1

Exprimez $\sin 3a$ comme une fonction de $\sin a$.

Question 2

L'Atomium a une hauteur d'environ 100 m. En assimilant la Terre à une sphère parfaite de 6000 km de rayon, jusqu'à quelle distance peut-on voir depuis le sommet de ce monument bruxellois ?

Quelle devrait être la hauteur d'un bâtiment qui permettrait de voir jusqu'à Ostende, distante de 110 km de Bruxelles ?

On demande d'effectuer les calculs à 10% près.

Indication : Afin de faciliter les calculs, il peut être intéressant d'approcher les fonctions de petits arguments par leur développement de Taylor au premier ordre :

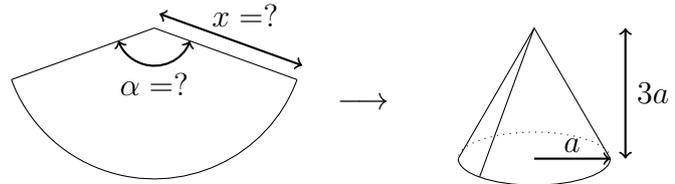
$$f(x) \approx f(0) + x f'(0)$$

Géométrie - Septembre 2015

Question 1

On souhaite fabriquer un "chapeau pointu" de forme conique à partir du développement représenté ci-dessous.

- Sachant que le chapeau obtenu devrait avoir une hauteur $3a$ et sa base un rayon a , calculez la longueur x nécessaire sur le développement.
- De même, calculez l'angle α .



Question 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ et $D(2, 3, 1)$.

- Donnez une équation cartésienne du plan ABC et une paire d'équations cartésiennes de la droite OD .
- Donnez des équations paramétriques de la droite d du plan ABC passant par A et orthogonale à la droite OD .
- Donnez des équations paramétriques de la droite d' du plan ABC passant par B et sécante à la droite OD .

Question 3

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy .

Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $x^2 = 2py$, A un point variable de \mathcal{P} d'abscisse $\lambda \neq 0$ et B un point variable de Ox d'abscisse μ .

- Quelle relation doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB soit tangente à \mathcal{P} ?
- Démontrez que cette relation est équivalente à imposer que AB soit perpendiculaire à BF , où F est le foyer de \mathcal{P} .