Algèbre - juillet 2014

1. a) Soient r_1, r_2 les 2 racines complexes du polynôme $x^2 + bx + 3$ ($b \in \mathbb{R}$). Que vaut $r_1^2 + r_2^2$?

   b) Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $x^3 + px + q$ soit divisible par $x^2 - 2x + 3$

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $[\ln(3x)]^3 - 4[\ln(3x)]^2 - [\ln(3x)] + 4 < 0$

   b) Si $|z|$ et $\tilde{z}$ désignent respectivement le module et le conjugué de $z \in \mathbb{C}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sqrt{|\widetilde{4+3i}|}\ x = \sqrt{3i + \widetilde{2-3i}}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y + 2z = 4 \\ mx + 2y - z = 5 \\ 3x + (m-5)y + 7z = 7 \end{array}\right. \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Analyse - juillet 2014

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt[3]{e^{-|x|}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   a) f est-elle paire, impaire ? Justifier.

   b) Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.

   c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \neq 0$.

   d) Déterminer les éventuels zéros de f, f' et f''.

   e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? de points d'inflexion? Justifier.

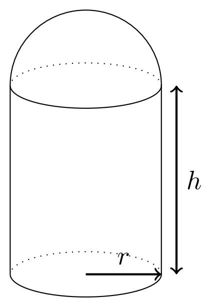
   f) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans les réponses aux questions précédentes.

2. Calculer (en justifiant les calculs)

   a) $\displaystyle\int x^5(\ln x)^2 dx$

   b) $\displaystyle\int_{-150\pi}^{150\pi} |\sin 6x| dx$

3. Un récipient métallique est constitué de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h dm, du disque de base de ce cylindre et d'un couvercle hémisphérique de rayon r dm (voir figure). Si le volume total de ce récipient doit valoir 15 dm^3, pour quelles valeurs de r et de h la surface totale du récipient est-elle minimale ?



Trigonométrie - juillet 2014

1. On pose $y = \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

   Calculer $\cos(4y)$ et en déduire y.

2. Un homme désire mesurer la hauteur d'un arbre qui se trouve au fond de son jardin. Depuis la porte de sa maison, il voit l'arbre sous un angle de $6°$; ayant avancé de dix mètres, il le voit sous un angle de $9°$. En négligeant la taille de l'homme devant les dimensions de l'arbre et du jardin, en supposant que l'arbre pousse perpendiculairement au sol et que ce dernier est horizontal, déterminez la longueur du jardin et la hauteur de l'arbre.
   En cas de chute, l'arbre risque-t-il de toucher la maison?

   Indication: pour évaluer numériquement les fonctions trigonométriques qui pourraient intervenir dans le calcul, utiliser l'approximation suivante

   $$f(x) \approx f(0) + xf'(0) \qquad (1),$$

   où f est une fonction trigonométrique (sin, cos ou tg), x est l'angle exprimé en radian et f' est la dérivée première de f.

Géométrie et Géométrie analytique- juillet 2014

1. Soient 4 points coplanaires P, Q, R, S tels que P, Q, R ne sont pas alignés. On va prouver que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \tag{1}$$
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS} \tag{2}$$
$$\text{Les segments } [PS] \text{ et } [QR] \text{ ont le même milieu} \tag{3}$$

   Pour ce faire, prouvez indépendamment les implications suivantes:

   a) La propriété (1) implique la propriété (2).

   b) La propriété (2) implique la propriété (3).

   c) La propriété (3) implique la propriété (1).

2. Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $P(0, 0, 2)$ et $Q(a, 0, 1)$ avec $a > 1$, ainsi que la sphère $\mathcal{S}$ de centre Q et de rayon unité. On considère un point variable A de la sphère $\mathcal{S}$ tel que la droite PA reste tangente à la sphère $\mathcal{S}$ en A. Le point A parcourt dès lors un cercle $\mathcal{C}$ tracé sur la sphère $\mathcal{S}$.

   a) Calculez le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

   b) Déterminez les coordonnées du centre C du cercle $\mathcal{C}$.

   c) Donnez une équation cartésienne du plan α dans lequel se trouve le cercle $\mathcal{C}$.

3. On reprend les données de la question 2, soit les points $P(0, 0, 2)$ et $Q(a, 0, 1)$ de l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, ainsi que la sphère $\mathcal{S}$ de centre Q et de rayon unité.

   On donne les équations paramétriques suivantes (φ étant un paramètre variable):

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{a^2+1}(a^2 + \sin\varphi) \\ y &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos\varphi \qquad\qquad (\varphi \in [0, 2\pi[) \\ z &= \dfrac{1}{a^2+1}(a^2 + 2 + a^2\sin\varphi). \end{cases}$$

   Ces équations décrivent le cercle $\mathcal{C}$, c-à-d le lieu des points A de la sphère $\mathcal{S}$ tels que la droite PA est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ en A.

   a) Vérifiez cette affirmation en montrant que $PA \perp QA$ et $A \in \mathcal{S}$.

   b) Déduisez-en des équations paramétriques de la droite variable PA.

   c) Soit B le point d'intersection entre la droite PA et le plan Oxy. Donnez des équations paramétriques du lieu parcouru par B lorsque A parcourt $\mathcal{C}$.

   d) En éliminant le paramètre variable φ de ces équations, déduisez une équation cartésienne du lieu parcouru par le point B, et donnez la nature de ce lieu.

Algèbre - septembre 2014

1. a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $x^2 - bx + 1$ divise $x^4 - x + a$

   b) Soient α, β, γ les 3 racines complexes du polynôme $3x^3 + 5x^2 + 4$.
   Que vaut $\alpha + \beta + \gamma$?

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a) $||x - 2| - x| = 2x$

   b) $e^{2x} + (1 - e)e^x - e = 0$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + mz = 3m \\ 2x + y - (2m+1)z = 4 \\ 4x + 5y - z = 3m - 2 \end{array} \right. \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Analyse - septembre 2014

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$.

   a) Que vaut la limite de f

   - lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
   - lorsque x tend vers 1 par valeurs > 1 ? Justifier.

   b) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette dérivée première.

   c) Calculer$f''(x)$ et étudier le signe de cette dérivée seconde.

   d) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? de points d'inflexion? Justifier et calculer leurs coordonnées.

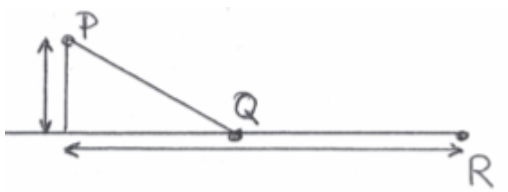
   e) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans les réponses aux questions précédentes.

2. Calculer (en justifiant les calculs)

   a) $\displaystyle\int \cos 3x\, e^{2x} dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + x^{50} \sin^{51} x) dx$

3. Une plate-forme pétrolière P, située en mer à 16 km d'un rivage rectiligne, doit être reliée par un pipeline PQR à une raffinerie R située sur le rivage à 40 km du point du rivage le plus proche de P. Sachant qu'un kilomètre de pipeline revient à 50.000 euros s'il est construit en mer et à 30.000 euros s'il est construit sur terre, à quelle distance de P faut-il placer le point Q pour minimiser le coût de la construction du pipeline ?



Trigonométrie - septembre 2014

1. Les étoiles Dubhe et Alkaid de la constellation de la Grande Ourse sont distantes de la terre de 105 al et 138 al, respectivement (une année lumière (al) est la distance parcourue par la lumière en une année). Depuis la Terre , leurs lignes de visée - c'est-à-dire les droites qui relient à la Terre - sont séparées de $22,5°$.
   Calculez la distance entre ces étoiles en al.

2. Prouvez l'égalité
$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Géométrie et Géométrie analytique -septembre 2014

1. Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $P(0,1,0)$ et $Q(\sqrt{2},0,1)$.

   a) Donnez les équations cartésiennes des plans α et β, où $\alpha = OPQ$ et β est le plan perpendiculaire à α passant par P et Q.

   b) Donnez des équations paramétriques de la droite d perpendiculaire à β et passant par O.

   c) Donnez les coordonnées du point R symétrique de O par rapport à β.

   d) Montrez que le triangle OQR est équilatéral.

   e) Le plan β coupe la droite Oz en un point S. Calculez la distance entre ce point et le plan α.

   f) Calculez le volume du tétraèdre $OQRS$.

2. Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit $\mathcal{A}$ le lieu des points équidistants de l'axe Ox et du point $P(0,1)$ et $\mathcal{B}$ le lieu des points équidistants de l'axe Oy et du point $Q(2,0)$.

   a) Donnez une équation de $\mathcal{A}$ et identifiez le type de lieu. Mêmes questions pour $\mathcal{B}$.

   b) Soit A un point variable de $\mathcal{A}$ d'abscisse p et B un point variable de $\mathcal{B}$ d'ordonnée q. Déterminez les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de p et q.

   c) Donnez les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{T_A}$ tangent à $\mathcal{A}$ en A et d'un vecteur $\overrightarrow{T_B}$ tangent à $\mathcal{B}$ en B, en fonction de p et q.

   d) En déduire les différents couples de valeurs (p,q) pour lesquels la droite AB est simultanément tangente à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B}$.

3. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois cercles coplanaires de même rayon a et de centres respectifs P, Q, R, passant tous trois par un point commun S. Soient T, U, V les trois autres points où les cercles se coupent deux à deux ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupant en T, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en U, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ en V).

   On va montrer que les points T, U, V sont sur un même cercle de rayon A. Pour ce faire, on va utiliser les propriétés suivantes:

   Propriété 1. Un quadrilatère $ABCD$ est un losange si et seulement si

   $$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|.$$

   Propriété 2. Si $ABCD$ est un losange, alors

   $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

   a) Montrez que $PTQS$, $QURS$ et $RVPS$ sont des losanges.

   b) Montrez que $PTWV$ est un losange de côté a, où W est le point tel que $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{VW}$.

   c) Montrez que $QTWU$ est un losange de côté a.

   d) Déduisez des points b) et c) que les points T, U, V sont sur un même cercle de rayon a, et identifiez le centre de ce cercle.