Algèbre -Juillet 2013

1. a) Déterminer les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

   b) Déterminer l'inverse de cette matrice pour $m = -1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel k, le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + ky + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (k-5)z = 7 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

   Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et, dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$, sachant qu'elle admet au moins une solution réelle.

Analyse - Juillet 2013

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x| + \frac{1}{2}}{x^2}$ pour tout x réel non nul.
   a) f est-elle paire , impaire ? Justifier.
   b) Déterminer les éventuels zéros de f.
   c) Que vaut la limite de f
      - lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
      - lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.

   d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum ? de minimum ? Justifier et calculer leurs coordonnées.
   f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisses.
   g) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans vos réponses aux questions précédentes.
2. Calculer (en justifiant les calculs)
   a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{5+\sin(7x)}{1+9x^2}dx$
   b) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+7}{e^{3x}}dx$
3. On appelle **secteur circulaire** la région comprise entre deux rayons d'un cercle C et un des deux arcs du cercle C joignant les extrémités de ces rayons. On veut fabriquer une plaque en forme de secteur circulaire dont le périmètre vaut 12 mètres et dont l'aire est maximale. Calculer le rayon r du cercle, la longueur de l'arc de cercle et l'angle (en radians) entre les deux rayons.

Trigonométrie - Juillet 2013

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$2\sin 3x \sin 9x = 1$$
2. Sachant que $\left\{\begin{array}{ll} \sin x + \sin y & = a \\ \cos x + \cos y & = b \end{array}\right.$ (où $a, b \in \mathbb{R}_0$),
calculer $\mathrm{tg}\dfrac{x+y}{2}, \sin(x+y), \cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$
3. Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal.
Trois points A,B,C de ce sol horizontal sont distants respectivement de 40m, 50m et 60m du pied du pylône. Les angles sous lesquels on voit de ces trois points le sommet du pylône valent respectivement α, β et γ. Si $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, quelle est la hauteur du pylône ?

Géométrie et Géométrie analytique - Juillet 2013

1. Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.
   Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse centrée en O passant par les points $A(2,0)$ et $B(0,4)$.
   Soit d une droite variable passant par le point $P(0,5)$.

   a) Discuter en fonction du coefficient angulaire m de la droite d le nombre de points d'intersection entre l'ellipse $\mathcal{E}$ et la droite d.

   b) Dans le cas où cette intersection est constituée de deux points Q, R, déterminer les coordonnées de ces points.

   c) Soit M le milieu du segment $[QR]$. Etablir une équation cartésienne du lieu de M.

   d) Identifier le type de lieu et représenter ce lieu sur un dessin en prenant pour unité 1cm (tracer la courbe à main levée à partir de quelques points particuliers).

2. On considère un pentagone régulier $ABCDE$ de côté c.

   a) Calculer l'aire du pentagone.

   b) Considérons maintenant l'étoile à 5 branches formée en reliant les sommets dans l'ordre $ACEBDA$. Calculer l'aire de la surface $\mathcal{E}$ délimitée par cette étoile.

   c) Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

      a) Donner une équation cartésienne du plan ABC.

      b) Déterminer les coordonnées du point O' symétrique de O par rapport au plan ABC.

      c) Calculer l'angle que fait la droite AO' avec le plan ABC.

      d) Donner des équations cartésiennes de la droite AO'.

      e) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ centrée en O' et tangente au plan ABC.

      f) Soient A', B' et C' les intersections de la sphère $\mathcal{S}$ avec les droites $O'A$, $O'B$ et $O'C$, respectivement. Calculer le volume du tétraèdre $O'A'B'C'$.

Algèbre - Septembre 2013

1 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx - my + m^2 z = m \\ x + y - z = m \\ (m-1)x + (m^2-1)y - (m-1)z = m^2 - 1 \end{cases} .$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et, dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$

3 a) Déterminer les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} -2-3a & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -3a-2 & 2+3a & -2-3a \\ -a^2+3a-2 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

b) Déterminer l'inverse de cette matrice si $a = -1$.

Analyse - Septembre 2013

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| - x^2 \text{ pour tout réel } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

a) f est-elle paire , impaire ? Justifier.

b) Déterminer les éventuels zéros de f.

c) Que vaut la limite de f
- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.

d) f est-elle continue en $x = 0$? Justifier.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum ? de points de minimum ? de points d'inflexion ? Justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans vos réponses aux questions précédentes.

2 Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$

b) $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx \quad (a \text{ et } b \neq 0)$

3 A partir d'un tronc d'arbre cylindrique de diamètre 12 dm, on veut fabriquer une poutre prismatique dont la base est un rectangle de largeur l et de longueur L inscrit dans un cercle de diamètre 12 dm. Sachant que la résistance d'une telle poutre est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la longueur du rectangle de base, calculer l et L pour que la résistance de la poutre soit maximale.

Trigonométrie - Septembre 2013

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

2 Quels sont les couples (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y?$$

Représenter graphiquement l'ensemble de ces points (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

3 Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal. Deux points A et B, situés sur le sol, sont alignés avec le pied du pylône. Si la distance de A à B vaut d et si les angles sous lesquels on voit de ces deux points le sommet du pylône valent respectivement α et β, calculer la hauteur h du pylône en fonction de d, α et β.

Géométrie et Géométrie analytique - Septembre 2013

1 Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(-1,-1,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,2,0)$.

a) Etablir des équations cartésiennes de la droite OA, et de la droite BC.

b) Donner une équation cartésienne du plan π parallèle à la droite OA et contenant la droite BC.

c) Déterminer les coordonnées du point D obtenu par projection orthogonale du point O sur le plan π.

d) Calculer le volume du tétraèdre $OBCD$.

e) Donner une équation cartésienne de la sphère de centre D tangente à la droite OA.

f) Calculer l'angle α entre les droites OA et BC.

2 Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 2 centré en $C(2,1)$. On considère un point variable P du cercle $\mathcal{C}$.

a) Exprimer les coordonnées du point P en fonction de l'angle θ entre le vecteur $\vec{CP}$ et l'axe orienté Ox.

b) Calculer, toujours en fonction de θ, les coordonnées du point Q obtenu par projection orthogonale du point P sur l'axe Oy.

c) En déduire les coordonnées du barycentre R du triangle OPQ.

d) Donner une équation cartésienne du lieu parcouru par R lorsque P parcourt le cercle $\mathcal{C}$.

e) Identifier le type de lieu et représenter ce lieu sur un dessin en prenant pour unité 15mm (tracer la courbe à main levée à partir de quelques points particuliers).

3 On considère un point P et un plan π situés à une distance 2 l'un de l'autre. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre P et de rayon 3.

a) Déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ formé par l'intersection entre le plan et la sphère.

b) Calculer le volume du cône dont la base est le cercle $\mathcal{C}$ et le sommet est le point P.

c) Un plan ρ parallèle à π coupe ce cône en deux parties ayant le même volume. Déterminer la distance entre les plans π et ρ.