

Algèbre Juillet 2012

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $|7x + 1| > |1 - 4x^2|$
2. Dans \mathbb{R} , déterminer
 - a) les racines du polynôme $P(x) = mx^2 + \frac{1}{2}x - 4m - 1$ en fonction du paramètre réel m ;
 - b) les valeurs du paramètre réel m , pour lesquelles aucune des racines de P n'appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Déterminer
 - a) les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, pour lesquelles la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 2m^2 & 3m^3 \\ -3m^2 & -2m^3 & 4m^4 \\ -4m^3 & -3m^4 & +m \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

- b) l'inverse de cette matrice pour $m = 1$.

4. Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel k , le système

$$\begin{cases} kx + ky - kz = k \\ k^2x - 2k^2y - kz = k^2 \\ x - ky - k^2z = 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Analyse Juillet 2012

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x(\ln |x|)^2 & \text{si } x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

b) Déterminer les zéros de f .

c) Que vaut la limite de f

• lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.

• lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.

d) f est-elle continue en $x = 0$? Justifier.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum ? de minimum ? Justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs coordonnées. Justifier.

h) Esquisser le graphe de la fonction f en indiquant les différents points apparaissant dans vos réponses aux questions précédentes.

2. Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int_{-3}^3 |x^3 - x| dx$

b) $\int \sin\left(\ln \frac{x}{5}\right) dx$

3. Parmi tous les triangles isocèles ayant un périmètre de 40 cm, déterminer celui qui maximise le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner le triangle autour de sa base (donner les longueurs des côtés de ce triangle).

Trigonométrie Juillet 2012

1. Prouver que, dans tout parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des 4 côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des 2 diagonales

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$2 \sin^3 x = \sin 3x$$

3. Démontrer que

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$$

Géométrie et Géométrie analytique Juillet 2012

1. Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé $OXYZ$, on donne les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 3)$ et $(2, 2, p)$.
 - a) Pour quelle valeur de p les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
 - b) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?
 - c) Que vaut l'angle formé par (AB) et (CD) lorsqu'elles se coupent ?
 - d) Que vaut le volume du tétraèdre $ABCD$ si $p = 3$?
 - e) Que vaut le rayon de la sphère qui passe par A, B, C et D , si $p = 3$?
2. Un plan passe par une diagonale d'une face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.
3. Un triangle ABC peut se déformer en tournant autour de son sommet fixe A . Dans l'hypothèse où ce triangle reste semblable à lui-même, déterminez le lieu géométrique de C si B décrit une droite fixe. Construisez ce lieu.

Algèbre Septembre 2012

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{2^{(x+1)} + 4^{(2x-2)}}{2^{(x+3)}} = \frac{1}{2}$
2. a) Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \text{ est-elle inversible ?}$$

- b) Déterminer l'inverse de cette matrice si $(a, b, c) = (a, 2a, 3a)$ avec $a \in \mathbb{R}_0$
3. Déterminer toutes les valeurs des paramètres réels a et b pour que le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^3 + (a+1)x^2 + (2+2b)x + (a-b)$ soit divisible par $x+1$, admette une racine double et deux racines complexes non réelles; déterminer ces racines.
4. Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel k , le système

$$\begin{cases} kx + (1-2k)y + (2k-1)z = -k \\ -x + (2-k)y + (k-2)z = k^2 \\ -k^2x + k^2y + (k^2-1)z = 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Analyse Septembre 2012

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^3 e^{-x^2}$ pour tout x réel.
 - a) f est-elle paire ? impaire ? Justifier.
 - b) Déterminer les éventuels zéros de f .
 - c) Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
 - d) Déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f .
 - e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum ? de minimum ? Justifier et calculer leurs abscisses.
 - g) Calculer les abscisses de tous les points d'inflexion du graphe de f . Justifier.
 - h) Esquisser le graphe de la fonction f en indiquant les différents points apparaissant dans vos réponses aux questions précédentes.
2. Calculer (en justifiant les calculs)
 - a) $\int_0^{11} [\sqrt{x}] dx$, où $[u]$ est le plus grand entier $\leq u$
 - b) $\int \sin(px) \cos(qx) dx$ (discuter selon les valeurs des constantes $p, q \in \mathbb{R}_0$)
3. Sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, on considère le point $a(4, 0)$ et deux points b et c de même abscisse x . Pour quelle valeur de x l'aire du triangle abc est-elle maximum ?

Trigonométrie Septembre 2012

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x = 0$$

2. Démontrer que

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

3. Si a et b sont les longueurs des côtés des 2 diagonales d'un quadrilatère plan convexe et si α est l'angle entre ces diagonales, prouver que l'aire du quadrilatère vaut $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

Géométrie et Géométrie analytique Septembre 2012

1. Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé $OXYZ$, on donne les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 2)$ et $(2, 2, 2)$.
 - a) Donnez deux équations cartésiennes pour chacune des droites (AC) , (AD) et (CD) .
 - b) Calculez l'angle formé par (CD) et (AB) .
 - c) Déterminez les coordonnées des points E situés à la même hauteur que C tels que (CE) forme un angle droit avec (AB) .
 - d) Calculez le volume du tétraèdre $ABCD$.
 - e) Calculez les coordonnées du centre de la sphère qui passe par A, B, C et D .
2. Un plan passe par une médiane d'une face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.
3. Un triangle ABC peut se déformer en tournant autour de son sommet fixe A . Dans l'hypothèse où ce triangle reste semblable à lui-même, déterminez le lieu géométrique de C si B décrit un cercle fixe. Construisez ce lieu.