Algèbre, Juillet 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre réel m, l'équation

$$|m\,x| + (x-1)^2 = 1.$$

2. Factoriser au maximum le déterminant $\begin{vmatrix} a-b^2 & b-a^2 & b-b^2 \\ b-c^2 & c-b^2 & c-c^2 \\ c-a^2 & a-c^2 & a-a^2 \end{vmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le

$$\text{système } \left\{ \begin{array}{l} mx + m^2y = 1 \\ m^2x + my = m \end{array} \right. \quad (m \in \mathbb{R}).$$

   Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et dans chaque cas, interpréter géométriquement le système et les ensembles de solutions obtenus.

   b) Même question dans $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer tous les polynomes à coefficients réels en la variable réelle x, du $5^{\text{ème}}$ degré, divisibles par x^2+1, dont le terme indépendant est nul, et dont le reste de la division par $(x+1)$ est égal à la fois au reste de la division par $(x-3)$ et au reste de la division par $(x+3)$.
   (Note : si vous le désirez, vous pouvez laisser la réponse finale sous forme factorisée).

Analyse, Juillet 2011

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e \ln |x|}{x}$ pour tout réel x non nul.

   a) f est-elle paire, impaire ? Justifier.
   b) Déterminer les zéros de f.
   c) Que vaut la limite de $f(x)$
      - lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
      - lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
   d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum ? de minimum ? Justifier et calculer leurs coordonnées.
   f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs coordonnées. Justifier.
   g) Esquisser le graphe de la fonction f.

2. Calculer (en justifiant les calculs) :
   a) $\displaystyle\int_{-7}^{7} \sqrt{x^2}dx$
   b) $\displaystyle\int \sin 5x \cos 5x \, e^x dx$

3. Parmi tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse est de longueur 6, quel est celui qui engendre, lorsqu'on le fait tourner autour d'un des côtés de l'angle droit, un cône de volume maximum ? Quel est le volume de ce cône ?

Trigonométrie, Juillet 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

2. Dans un cercle de rayon r, on trace une corde AB de longueur $2d < 2r$.
   Les tangentes au cercle en A et B se coupent en un point C.
   Calculer, en fonction de r et d :
   (1) l'aire du triangle ABC
   (2) le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$. Justifier.

Géométrie et géométrie analytique, juillet 2011

1. On donne un cube de côté L. On nomme A, B, C et D les quatre sommets consécutifs d'une des faces du cube et A', B', C' et D' ceux de la face parallèle. Ces points sont disposés de façon à ce que les segments $[A, A'], [B, B'], [C, C']$ et $[D, D']$ soient des arêtes du cube.
   a) Démontrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.
   b) Démontrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$.
   c) Si on désigne par T la projection orthogonale du point C sur le plan $AB'D'$ (c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à ce plan issue de C), démontrer que la longueur du segment $[A', T]$ vaut le tiers de celle du segment $[A', C]$.
   d) Calculer le volume de la région intérieure au cube et comprise entre les plans $AB'D'$ et $C'DB$.
   e) Calculer le volume de la sphère dont le centre coïncide avec celui du cube et qui est tangente aux plans $AB'D$ et $C'DB$.

2. On donne un cercle Γ de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[A, B]$ et $[C, D]$. Un point variable P parcourt Γ. On appelle Q l'intersection des droites AP et CD.
   Déterminer le lieu de l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle OPQ.

3. On donne un polygone régulier convexe $A_1A_2 \dots A_n$, avec $n \geq 3$, et un cercle Γ passant par le centre de gravité G de ce polygone. Les droites $A_1G, A_2G, \cdots, A_nG$ rencontrent Γ en G, ainsi qu'en un certain nombre m de points distincts de G notés $B_1, B_2, \cdots, B_m$ (sans ordre particulier).
   Démontrer que les points $B_1, B_2, \cdots, B_m$ font partie des sommets d'un même polygone régulier convexe à n côtés.

   Suggestion : commencer par établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points fasse partie des sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés.

Algèbre, septembre 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre réel m, l'équation

$$e^{3x} + \frac{m}{e^{mx}} = 0$$

2. Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & a^2-b^2 \\ a^3 & b^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

   Déterminer l'inverse de cette matrice dans le cas où $(a, b) = (1, -2)$

3. Déterminer toutes les valeurs complexes du paramètre non nul m pour qu'une des racines du polynome $m^2x^3 - x^2 + m^2x - 1$ soit la moyenne arithmétique des autres.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx - m^2y + (m - m^3)z = m \\ m^2x + m^4y + (m^2 - m^4)z = -m \\ 2m^3x + m^6y + (m^3 - m^5)z = 0 \end{cases} .$$

   Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Analyse, septembre 2011

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|(\ln |x| - 1)$ pour tout x réel non nul.

   a) f est-elle paire, impaire ? Justifier.
   b) Déterminer les zéros de f.
   c) Que vaut la limite de $f(x)$
      - lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
      - lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
   d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   e) Que vaut la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
   f) Trouver les éventuels maxima, minima et points d'inflexion de f. Justifier et calculer leurs coordonnées.
   g) Esquisser le graphe de la fonction f.

2. Calculer (en justifiant les calculs) :
   a) $\displaystyle\int (x-3)^2 \ln x \, dx$
   b) $\displaystyle\int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| dx$

3. Une capsule, en forme de cylindre circulaire terminé à chaque extrémité par une demi-sphère, a un volume de 10 cm^3.
   Que vaut l'aire totale A de cette capsule, exprimée en fonction du rayon r des demi-sphères ?
   Pour quelle valeur de r cette aire est-elle minimum ?

Trigonométrie, septembre 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$2\sin^2 5x + \sin^2 10x = 2$$

2. Si A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle et si
$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B,$$
peut-on en conclure que le triangle est rectangle ?

Géométrie et géométrie analytique, septembre 2011

1. Une sphère opaque de rayon r et de centre C, posée sur un sol plan horizontal, est éclairée par une source lumineuse ponctuelle O, située à une distance $2r$ de C et à la même hauteur que C.
   a) Déterminer le lieu des points de la sphère où les rayons lunimeux sont tangents à cette sphère.
   Suggestion : Utiliser la symétrie du problème par rapport à l'axe OC.
   b) Caractériser la forme de l'ombre portée par cette sphère sur le sol.

2. On donne le triangle ABC rectangle en A et une droite d qui passe par A. On appelle G la projection orthogonale B sur d et E celle de C sur d. On donne également la parallèle d_1 à AC menée par G et la parallèle d_2 à AB menée par E.
   a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.
   b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et d_2 lorsque d varie.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $[0, 2, 4], [2, 0, -2]$ et $[1, -1, 3]$.
   a) Déterminer l'équation du plan médiateur de $[A, B]$.
   b) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de C sur la droite AB.
   c) Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.
   d) Déterminer l'aire du triangle ABC.