Algèbre

Juillet 2010

Question 1

Déterminer toutes les valeurs réelles de a et b pour que $(a+bi)^3$ soit un réel strictement supérieur à 8. Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.

Question 2

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m telles que

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \qquad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}.$$

Question 3

Factoriser au maximum le déterminant $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + (m^2 - 1)z & = & -m \\ mx + y + 2(m-1)z & = & -m \\ (1+m)x - my + (m+1)z & = & m^2 + 3m + 3 \end{array} \right. \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système

Analyse

Juillet 2010

Question 1

Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = (1 - e^{-x})(7 - e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les zéros de f
b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant les calculs.
c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
d) Trouver les éventuels extrema de f. Pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.
e) Trouver les éventuels points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (justifier).
f) En utilisant les approximations $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 7 \approx 1,9$, tracer le graphe de f dans un repère orthogonal en indiquant les unités sur les axes, les coordonnées exactes des points remarquables apparaissant dans les réponses a) à e) et les asymptotes éventuelles.

Question 2

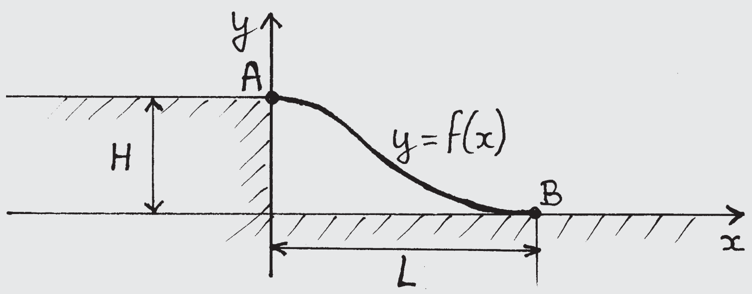
Calculer (en détaillant les calculs) :

a) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 + \sin^9 x) dx$

Question 3

On veut installer une rampe permettant à des chariots de franchir une marche de hauteur H (voir la figure ci-dessous) .



Pour éviter les secousses, on demande que le profil $y = f(x)$ de cette rampe (qui s'étend de A à B) ait une tangente horizontale aux points A et B.
Existe-t-il une fonction de type $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaisant à ces contraintes ? Si oui, calculer les coefficients a, b, c, d en fonction de H et L.

Trigonométrie

Juillet 2010

Question 1

Quels sont tous les triples (x, y, z) de nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} x + y = 2z \\ \sin x + \sin y = 2 \sin z \end{cases}$$

Question 2

a) Exprimer $\sin^3 x$ en fonction de $\sin 3x$ et $\sin x$

b) Démontrer que

$$27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20 \sin 9^\circ$$

Géométrie et géométrie analytique

Juillet 2010

Question 1

Les étudiants sont priés :
1°) d'écrire lisiblement.
2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.
3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur DROIT de chaque feuille

I

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $OXYZ$. On donne les droites d_1 et d_2 d'équations

$$d_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} Y = -1 \\ Z = -2X \end{array} \right. \qquad d_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} Y = 1 \\ Z = 2X \end{array} \right.$$

a) Démontrez que l'axe OY est la perpendiculaire commune aux droites d_1 et d_2.
Soit le plan π d'équation $X = k$ (k est un réel quelconque) et P_1 et P_2 ses intersections avec d_1 et d_2.
b) Déterminez les coordonnées des points P_1 et P_2.
c) Montrez que le milieu du segment P_1P_2 est sur OX.
d) Ecrivez des équations cartésiennes de la droite P_1P_2.
Lorsque k varie, la droite P_1P_2 décrit la surface d'équation $Z = 2XY$.
e) Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans d'équation $Z = b$ où b est une constante réelle quelconque.

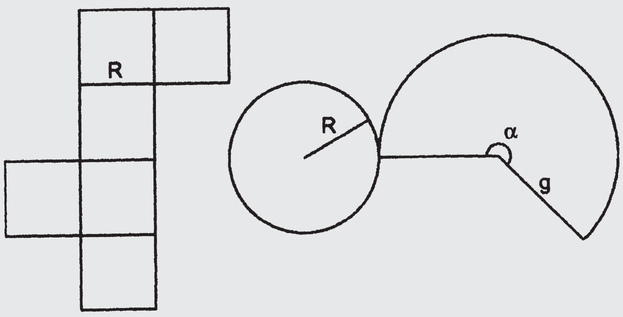
II

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormés OXY.
On donne le cercle de rayon unité centré en $(-2, 0)$ et le point P de coordonnées $(1, 0)$.
On demande de déterminer une équation cartésienne du lieu des points équidistants de P et du cercle, et d'en spécifier la nature.

III

La figure ci-dessous représente les développements d'un cube d'arête R et d'un cône. Le développement du cône est constitué d'un cercle de rayon R et d'un secteur de cercle de rayon g et d'angle α.
Dans l'hypothèse où toute section du cône par un plan qui passe par son axe est un triangle équilatéral, on demande de

a) calculer α et la hauteur du cône en fonction de R uniquement,
b) déterminer le rapport entre le volume du cube et celui du cône.



Algèbre

Septembre 2010

Question 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_{10}(7x-9)^2 + 2\log_{10}(3x-4) = 2$

Question 2

Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^3 + a^2x + b^2$ soit divisible par $(x+1)^2$.

Question 3

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3m+1 & m-1 & m^2+1 \\ -5-m & 2m-2 & 2m \\ 2+2m & -m^2+1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ est inversible .}$$

Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -mx-(m^2+m)y+z & = & m^2+m \\ x+(-m+1)y-mz & = & -1 \\ -mx+(m^2+1)y+z & = & -m-1 \end{array} \right. .$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Analyse

Septembre 2010

Question 1

Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = e^{-2x} - e^{-4x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en détaillant les calculs.
b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f (justifier).
c) Déterminer les zéros éventuels de f.
d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
e) Déterminer les éventuels extrema de f. Pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.
f) Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$.
g) En utilisant l'approximation $\ln 2 \approx 0,69$, tracer le graphe de f dans un repère orthogonal, en indiquant les coordonnées exactes des points remarquables rencontrés de b) à f) et les asymptotes éventuelles.
h) En prenant comme unité d'aire l'aire du rectangle défini par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, calculer l'aire $A(k)$ de la région comprise entre le graphe de f et l'axe ox pour x entre 0 et k, puis calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k)$.

Question 2

Calculer (en détaillant les calculs) :

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} x\sin(x^2)dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4|x^5|dx$

Question 3

Quelle est la hauteur du cylindre de volume maximum inscrit dans une sphère de rayon R donné ? Que vaut le rapport entre le volume de la sphère et celui de ce cylindre ?

Trigonométrie

Septembre 2010

Question 1

Les tangentes communes extérieures à deux cercles tangents extérieurement font un angle $\alpha (0 < \alpha < \pi)$. Que vaut le rapport $\dfrac{R}{r}$ des rayons de ces deux cercles ? (on suppose $r < R$).

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin 8x - \sin 6x - \cos 8x \sin 2x = 0$$

Géométrie et géométrie analytique

Septembre 2010

Question 1

Les étudiants sont priés :
1°) d'écrire lisiblement.
2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.
3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur DROIT de chaque feuille

I

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $OXYZ$. On donne les droites d_1 et d_2 d'équations

$$d_1 \equiv \begin{cases} X = 2 \\ Z = Y \end{cases} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} X = -2 \\ Z = -Y \end{cases}$$

Soit le plan π d'équation $Y = kX$ (k est un réel quelconque) et P_1 et P_2 ses intersections avec d_1 et d_2.

a) Déterminez les coordonnées des points P_1 et P_2.
b) Calculez la distance qui sépare P_1 de P_2.
c) Déterminez le plus petit angle que fait d_2 avec la droite P_1P_2.
d) Calculez l'aire du triangle P_1OP_2.
Lorsque k varie, la droite P_1P_2 décrit la surface d'équation $2Y = ZX$,
e) Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans

II

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormés OXY.
On donne le cercle de rayon 3 centré à l'origine et le point P de coordonnées $(2, 0)$.
On demande de déterminer une équation cartésienne du lieu des points équidistants de P et du cercle et d'en spécifier la nature.

III

Soit le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre AB. On nomme S_1 l'aire comprise entre le côté AC du triangle et l'arc de cercle AC et on appelle S_2 l'aire située entre le côté CB et l'arc CB. Que vaut le rapport des aires $\frac{S_1}{S_2}$ si l'angle $A\hat{B}C$ vaut β ?