Algèbre

Juillet 2009

Question 1

Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme

$$P(x) = x^5 + bx^4 + ax^3 + a^2 + x^2 + b^2x + b$$

soit divisible par $x^2 + b$.

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$$

Question 3

Factoriser au maximum dans $\mathbb{R}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b+1 & a^2-b^2+1 & a-b+1 \\ a-b & a+b & a+b \\ a^2-b^2 & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix}, \text{ où } a, b \text{ sont des réels}$$

Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x + y + 1(1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Analyse

Juillet 2009

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\sin(x^2)$.

a) Déterminer les zéros de f
b) f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leur nature. Si non, justifier.
c) f est-elle périodique ? Justifier.
d) Calculer la dérivée de f et l'évaluer en chacun des zéros de f.
e) Déterminer les points communs de la courbe C d'équation $y = f(x)$ avec la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$, ainsi que la valeur de la pente de la tangente à C en chacun de ces points.
f) Combien la fonction f possède-t-elle de points de maximum ? Justifier.
g) Esquisser les courbes C et Γ en indiquant clairement les abscisses des points remarquables.

Question 2

On veut construire une cuve cylindrique de volume donné V (en m^3). Par m^2, le prix du revêtement intérieur de la base est trois fois plus élevé que celui de la paroi latérale. Calculer (en fonction de V) le rayon et la hauteur de la cuve minimisant le prix total du revêtement intérieur.

Question 3

Calculer les intégrales suivantes en justifiant les calculs

a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(23 + x^{23}e^{-x^2})dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^{2009}}dx$

Trigonométrie

Juillet 2009

Question 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - 1$$

Question 2

Si A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle et si

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

peut-on en conclure que le triangle est rectangle ? Justifier.

Géométrie et géométrie analytique

Juillet 2009

Question 1

Les étudiants sont priés :
1°) d'écrire lisiblement.
2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.
3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur DROIT *de chaque feuille*

I OXY est un repère orthonormé du plan. C_1 et C_5 sont les cercles centrés à l'origine de rayons respectifs 1 et 5. Une demi-droite mobile d'origine O et de pente m (où m est un paramètre réel ou infini) coupe C_1 en P et C_5 en Q. Soit A un point de l'axe OY.

a) Déterminez le lieu géométrique du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle APQ.
b) Existe-t-il des positions particulières de A, sur OY, telles que le lieu soit tangent à C_1 et C_5 ?
c) Y a-t-il d'autres points du plan pour lesquels cette propriété est vérifiée? Si oui, lesquels ?

II $OXYZ$ est un repère orthonormé de l'espace.
Les droites a et b d'équations $a \equiv \{X = 2, Z = 0\}, b \equiv \{Z = 0, Y = 2\}$ forment un carré $OABC$ avec les axes OX et OY (A est sur OX et C sur OY).
Les points $P(0, 0, h)$ et $Q(0, 0, -h)$ (h est réel et positif) constituent, avec trois des sommets du carré, l'hexaèdre (polyèdre à 6 faces) $PQABC$.

a) Que doit valoir h pour que l'hexaèdre ait un volume égal à celui du cube dont $OABC$ serait une face ?
b) Ecrivez une équation cartésienne de chaque face de l'hexaèdre.
c) Ecrivez des équations cartésiennes des droites PA, PB, QB et QC.
d) Que vaut h si l'angle PBQ est droit ?
e) On pose $h = 2$, écrivez des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan QAB, issue de O.

III L'arête d'un cube mesure 18 mètres. Calculez le volume compris entre ce cube et sa sphère circonscrite (celle qui passe par les sommets du cube).

Algèbre

Septembre 2009

Question 1

Soit P un polynôme en la variable réelle x, à coefficient réels. Si a et b sont deux réels distincts, déterminer le reste de la division de P par $(x-a)(x-b)$, sachant que le reste de la division de P par $x-a$ vaut 1 et que le reste de la division de ce même polynôme P par $x-b$ vaut -1.

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\ln(x+4) \geq \ln(2-x)$.

Question 3

Déterminer les valeurs réelles des paramètres a, b, c pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+3 & a-2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c+1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

Calculer A^{-1} lorsque $a=b=c=0$

Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \quad (m \in \mathbb{R}). \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Analyse

Septembre 2009

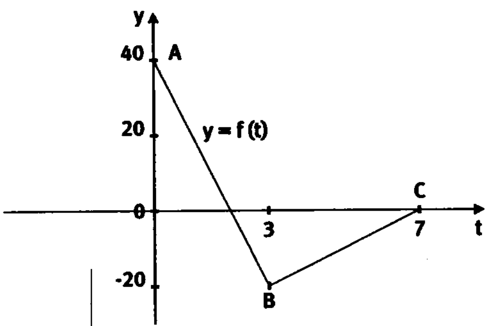
Question 1

Soit $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle f
b) Déterminer les asymptotes de la courbe C d'équation $y = f(x)$ et préciser leur nature.
c) Déterminer les zéros de f.
d) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
e) Déterminer les points de minimum et les points de maximum de f
f) Esquisser le graphe C de la fonction f.
g) C admet-il un centre de symétrie ? Justifier.

Question 2

Le graphe d'une fonction f est constitué des segments de droite AB et BC



a) Si $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, que vaut $F(4)$?
b) Tracer le graphe de la fonction dérivée de f sur la figure ~~ci-~~dessus.

Question 3

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int \frac{e^{5x} - 5x}{e^{2x}} dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}(3 + \sin 5x + x \cos 7x)dx$. Justifier les calculs.

Trigonométrie

Septembre 2009

Question 1

Démontrer que

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16} \qquad (1)$$

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = \sin x + 3\cos x$$

Géométrie et géométrie analytique

Septembre 2009

Question 1

Les étudiants sont priés :
1°) d'écrire lisiblement.
2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.
3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur <u>*DROIT*</u> *de chaque feuille*

I. OXY est un repère orthonormé du plan. On donne l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} = 1$ et deux points de l'axe OX : $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ où a est réel positif.
   a) Déterminez le lieu géométrique du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle PAB sachant que P est un point quelconque de l'ellipse.
   b) Calculez la valeur de a si A et B sont les foyers de l'ellipse.
   c) Déterminez le lieu géométrique du point Q situé sur OP au tiers de OP à partir de O.
   d) Déterminez le lieu géométrique du point M, milieu de OP.

II. Les axes du repère orthonormé de l'espace $OXYZ$ coïncident avec trois arêtes d'un cube de côté 4 qui repose sur le plan horizontal OXY, du côté des X, des Y et des Z positifs.
   a) Montrez que les trois points $A(2,0,0), B(4,3,0)$ et $C(0,0,3)$ appartiennent à trois arêtes distinctes du cube.
   b) Le plan ABC coupe le cube selon un hexagone $BACDEF$. Déterminez les coordonnées des sommets de ce polygone.
   c) Calculez la distance qui sépare le plan ABC du sommet du cube qui est le plus éloigné de l'origine O des axes.
   d) Déterminez le plus petit angle que font les plans ABC et OXY.

III. Les côtés d'un carré sont divisés en quatre segments de même longueur. On numérote de 1 à 16 les points de subdivision en commençant par un des sommets du carré et en tournant dans le sens horlogique. On relie le point 2 au point 7, le point 6 au point 11, le point 10 au point 15 et le point 14 au point 3. Les quatre droites ainsi obtenues déterminent un quadrilatère.
   a) Quelle est la nature de ce quadrilatère ?
   b) Combien de fois l'aire du quadrilatère est-elle comprise dans celle du carré initial ?