

ALGÈBRE QUESTION 1 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $4^x - 3^{(x-\frac{1}{2})} = 3^{(x+\frac{1}{2})} - 2^{2x-1}$.

ALGÈBRE QUESTION 2 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Si α est une racine cubique complexe non réelle de l'unité, alors

- a) démontrer que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$;
- b) en déduire que l'expression $(\alpha^2 - \alpha + 1)(1 + \alpha - \alpha^2)$ est indépendante de α .

ALGÈBRE QUESTION 3 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} (10m + 7)x - 3y + (7 - m)z = -6m \\ (2m + 1)x - y + 2z = -2m \\ -(2 + m)x + my - (m + 1)z = 1 + m^2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}) .$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

ALGÈBRE QUESTION 3 (SUITE) , JUILLET 2008

Nom :

Prénom :

N°

ALGÈBRE QUESTION 4 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Déterminer les valeurs réelles des paramètres a, b, c pour lesquelles

$$\begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \\ c^4 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ANALYSE QUESTION 1 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Soit la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos x$.

- Déterminer le domaine de définition (dans \mathbb{R}) de f et les asymptotes éventuelles de f , en précisant leur nature.
- f est-elle périodique? f est-elle paire, impaire? Justifiez brièvement.
- Déterminer les zéros de f .
- Déterminer la plus grande valeur prise par f .
- Calculer f' .
- Combien la fonction f possède-t-elle de maxima? de minima?
- Esquisser le graphe de g défini par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
- Esquisser le graphe de f .

ANALYSE QUESTION 1 (SUITE) , JUILLET 2008

Nom :

Prénom :

N°

ANALYSE QUESTION 2 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Avec un rectangle de carton de 30 cm de long et 14 cm de large, on veut fabriquer une boîte sans couvercle en enlevant 4 carrés identiques (un dans chaque coin), puis en repliant le carton restant. Quelle est la longueur du côté des carrés à enlever pour obtenir une boîte de volume maximum ?

ANALYSE QUESTION 3 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Calculer

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx$

TRIGONOMETRIE QUESTION 1 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Démontrer que

$$\sin 70^\circ \cos 50^\circ + \sin 260^\circ \cos 280^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

TRIGONOMETRIE QUESTION 2 , JUILLET 2008

Nom :

N°

Prénom :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\sin 4x + \sin 6x + \cos 8x = \cos 2x \quad (1)$$

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE : JUILLET 2008

Les étudiants sont priés :

1°) d'écrire lisiblement.

2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.

3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur DROIT de chaque feuille

I Soit un triangle ABC rectangle en A . On nomme T le point de contact de l'hypoténuse avec le cercle inscrit. Montrer que l'aire du triangle égale le produit des distances BT et TC .

II On donne deux carrés accolés le long d'un côté : $ABCD$, de côté fixe a , et $BEFG$, de côté variable (G est sur BC ou sur son prolongement au-delà de C). On demande de déterminer le lieu géométrique du point P , intersection des droites EC et DF .

III Soit le cube $OABCDEFG$ de côté égal à 2 (cf.figure). On donne les points $P(0, 2, 1)$, $Q(2, 1, 2)$ et $R(2, 0, 1)$.

On demande :

a) D'écrire une équation cartésienne du plan π passant par P, Q et R .

b) De déterminer les coordonnées des points U et V du plan π qui appartiennent à BF et DO , respectivement.

c) De déterminer la nature et l'aire du quadrilatère $VRUP$.

d) D'écrire des équations de la perpendiculaire menée de B au plan π .

e) De calculer la distance de D à π .

f) De déterminer la nature et l'aire du polygone d'intersection entre le cube et le plan π .

ALGÈBRE QUESTION 1 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$ soit divisible par $(x - 1)^3$. Indiquer le quotient de cette division.

ALGÈBRE QUESTION 2 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Résoudre dans \mathbb{R} le système d'inéquations

$$\begin{cases} \frac{-3x^2 + 40x - 28}{x - 2} \geq 2 \\ |x - 2| > |2x - 1| \end{cases}$$

ALGÈBRE QUESTION 3 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m-1 & m^2-1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où $m = 0$.

ALGÈBRE QUESTION 4 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} (3 - m)x + (2 - m)y + z = -m \\ (2m + 4)x + (2 + m)y + (2m + 1)z = -2m^2 \\ (3m - 1)x + (2m - 1)y + m z = -m^2 + m + 1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}) .$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

ALGÈBRE QUESTION 4 (SUITE) , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

ANALYSE QUESTION 1 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Soit f la fonction définie par $f(x) = (\ln |x|) \sin x$ pour x réel non nul.

- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x)$.
- f est-elle périodique? Justifier brièvement.
- f est-elle paire, impaire? Justifier brièvement.
- Déterminer les zéros de f .
- Calculer f' .
- Esquisser les courbes $C^+ \equiv y = \ln |x|$ et $C^- \equiv y = -\ln |x|$.
- Déterminer les points d'intersection de la courbe $C \equiv y = f(x)$ avec les courbes C^+ et C^- .
- Esquisser le graphe de f .

ANALYSE QUESTION 1 (SUITE) , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

ANALYSE QUESTION 2 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

L'arête latérale d'un cône circulaire droit mesure 15cm.

Pour quelle valeur du rayon de la base le volume de ce cône est-il maximum ?

ANALYSE QUESTION 3 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Calculer

a) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 4x \, dx$

b) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 4x| \, dx$

c) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin |4x| \, dx$

TRIGONOMETRIE QUESTION 1 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Si A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle et si

$$\cotg \frac{B}{2} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} ,$$

peut-on conclure que le triangle est rectangle ?

TRIGONOMETRIE QUESTION 2 , SEPTEMBRE 2008

Nom :

N°

Prénom :

Démontrer que

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$$

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE : SEPTEMBRE 2008

Les étudiants sont priés :

1°) d'écrire lisiblement.

2°) d'indiquer leur nom et prénom dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.

3°) d'indiquer le numéro de la place qui leur a été assignée dans le coin supérieur DROIT de chaque feuille

- I. Soit un triangle équilatéral et M un point intérieur au triangle. Montrer que la somme des distances de M aux côtés du triangle égale sa hauteur.
- II. Dans un plan rapporté au système d'axes coordonnées OXY , on donne la droite d d'équation $Y = 6$ et le point P de coordonnées $(2, 0)$. Déterminer le lieu des points M du plan dont le rapport des distances à la droite d et au point P vaut 2. Représentez ce lieu en prenant le cm comme unité de mesure.
- III. La base carrée d'une pyramide $SABCD$ repose sur un plan horizontal. S est le sommet de la pyramide et toutes les arêtes ont même longueur L . Par S , on mène la parallèle p au côté AB du carré $ABCD$ et l'on reporte sur p , de part et d'autre de S , une longueur L . On nomme E et F les points ainsi obtenus (E est du côté de DA).
- On demande :
- De montrer que les tétraèdres $FBCS$ et $EADS$ sont réguliers.
 - De déterminer la nature du solide formé de la pyramide et des deux tétraèdres. On déterminera en particulier :
 - le nombre, la forme et l'aire des faces de ce solide ;
 - le nombre de ses arêtes et sommets ;
 - les angles des dièdres formés par les faces, en fonction de l'angle α que font les plans $ABCD$ et SAB .
 - le volume du solide.